

多角形発振器ネットワークで観測される 発振停止現象の理論解析

Theoretical Analysis of Amplitude Death in Coupled Polygonal Oscillatory Networks

上手 洋子¹
Yoko Uwate

西尾 芳文¹
Yoshifumi Nishio

徳島大学 大学院 社会産業理工学研究部 理工学域 電気電子系¹
Dept. of E. E. Eng., Division of Science and Technology, Graduate School of Technology,
Industrial and Social Sciences, Tokushima University

1 はじめに

2つの多角形発振器リングネットワークを1つの枝で結合したシステムにおいて、結合強度を増加することで発振停止現象が観測される。本研究では、この発振停止現象を理論解析を用いて説明する。

2 回路モデルおよび発振停止現象

図1に2つの多角形発振器リングネットワークが1つの枝で結合された回路モデルを示す。この回路システムでは、隣り合う発振器間は逆相同期になるような結合方法を用いる。また、1つの多角形発振器リングネットワークの発振器数は奇数とする。よって、 N 相同期になるように発振器は同期することになる。2つの多角形発振器リングネットワークをつなぐ枝と結合している発振器を共有発振器とよぶ。

$N=5$ の時の回路図を図2に示す。回路図より、キルヒホッフの法則を用いて回路方程式を導出し、変数変換とパラメータを用いることで正規化された4次の微分方程式を得ることができる。ここでは、この微分方程式をルンゲクッタ法を用いてシミュレーションを行った。

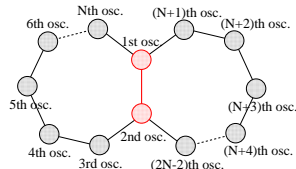


図1: 一般的な2つの多角形発振器リングネットワーク。

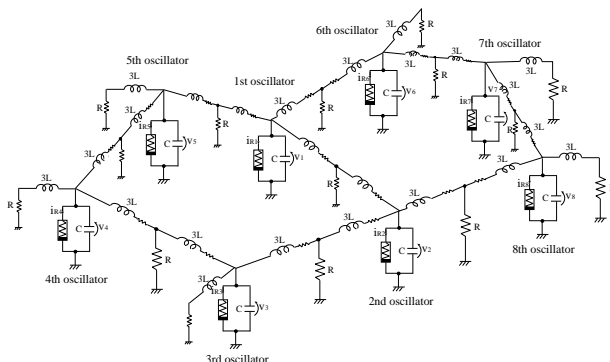


図2: 5-5 結合ネットワーク。

まず、発振器間の結合強度を大きくしていくと、全ての発振器の振幅の減少がみられる。さらに結合強度を大きくすると、まず、共有発振器から一番遠く離れた4番目と7番目の発振器が発振停止になる。その後、結合強度の増加によって残り全ての発振器が同時に発振停止となる。その時の1番目、3番目、4番目の発振器の振幅の変化を図3(a)に示す。

3 理論解析 (平均化法)

この興味深い部分的な発振停止現象を説明するために、理論解析の1つとして平均化法を用いる。平均化法を用いて得られた1番目、3番目、4番目の発振器の振幅を以下に示す。

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{\varepsilon \rho_1}{8} (4 - \rho_1^2) \\ &+ \frac{\gamma}{6(4\gamma^2 + 9)} \left(-9\rho_1 - 2\gamma\rho_2 \sin \phi_A - 3\rho_2 \cos \phi_A \right. \\ &\left. - 4\gamma\rho_5 \sin(\phi_A + \phi_B + \phi_C + \phi_D) \right. \\ &\left. - 6\rho_5 \cos(\phi_A + \phi_B + \phi_C + \phi_D) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

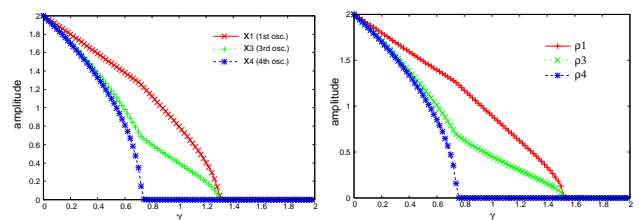
$$\begin{aligned} \dot{\rho}_3 &= \frac{\varepsilon \rho_3}{8} (4 - \rho_3^2) \\ &+ \frac{\gamma}{6(4\gamma^2 + 9)} \left(-6\rho_3 + 2\gamma\rho_2 \sin \phi_B - 3\rho_2 \cos \phi_B \right. \\ &\left. - 2\gamma\rho_4 \sin \phi_C - 3\rho_4 \cos \phi_C \right) + \frac{\gamma}{2(\gamma^2 + 9)} (-\rho_3). \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_4 &= \frac{\varepsilon \rho_4}{8} (4 - \rho_4^2) \\ &+ \frac{\gamma}{6(4\gamma^2 + 9)} \left(-6\rho_4 + 2\gamma\rho_3 \sin \phi_C - 3\rho_3 \cos \phi_C \right. \\ &\left. - 2\gamma\rho_5 \sin \phi_D - 3\rho_5 \cos \phi_D \right) + \frac{\gamma}{2(\gamma^2 + 9)} (-\rho_4). \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \phi_A &\equiv \theta_1 - \theta_2, & \phi_B &\equiv \theta_2 - \theta_3, \\ \phi_C &\equiv \theta_3 - \theta_4, & \phi_D &\equiv \theta_4 - \theta_5, \\ \phi_A + \phi_B + \phi_C + \phi_D &\equiv \theta_5 - \theta_1. \end{aligned} \quad (4)$$

これらの式をニュートン法を用いて計算すると図3(b)のような結果を得ることができた。図3(a)のシミュレーション結果と比較すると、部分的な発振停止現象を定性的に説明していることが確認できた。



(a) シミュレーション。

(b) 理論解析。

図3: 部分的な発振停止現象の結果。

4 まとめ

本研究では、2つの多角形発振器リングネットワークを1つの枝で結合した回路システムで観測される部分的な発振停止現象を平均化法を用いて説明した。今後の課題は、本理論解析を一般化することでより大規模なネットワークへ適用することである。