

リング・スター構造を含んだ結合発振器の同期現象

上田 和輝[†] 上手 洋子[†] 西尾 芳文[†]

[†] 徳島大学工学部 〒770-8506 徳島市南常三島 2-1

E-mail: †{kazuki,uwate,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

あらまし 同期現象の解析は物理学・医学・社会学・自然学や工学といった様々な分野で研究されている。本研究では、結合 van del Pol 発振器を用いた同期現象の研究を行う。van del Pol 発振器は回路構造が単純であるため、様々な形で結合され、その時に観測される同期現象について研究が行われてきた。我々は結合間の結合構造に注目し、スター構造とリング構造が共存する回路を提案する。そして、コンピュータシミュレーションを用いて提案回路モデルの同期状態を観測する。

キーワード 同期現象, van del Pol 発振器, 結合構造, シミュレーション

Synchronization of Coupled by Oscillators Containing Ring and Star Structures

Kazuki UETA[†], Yoko UWATE[†], and Yoshifumi NISHIO[†]

[†] Faculty of Engineering, Tokushima University Minami-Josanjima 2-1, Tokushima city, Tokushima,
105-0123 Japan

E-mail: †{kazuki,uwate,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

Abstract Analysis of synchronization phenomena is expected for applying in various fields. For example, firefly luminescence, cry of birds and frogs, applause of many people and so on. In this study, we propose a new system model using the van del Pol oscillator. We investigate synchronization phenomena observed in the system model containing ring and star. In addition, we observe several types of synchronization phenomena by increasing the coupling strength of ring.

Key words synchronization phenomena, van del Pol oscillator, coupled structure, simulation

1. ま え が き

同期現象は非線形現象の1つで、世界中でその研究がなされている。我々は自然現象の様々な場面で、この同期現象を観測している。例えば、ホテルの同時発光、鳥やカエルの鳴き声、人々の拍手などが挙げられる。

同期現象は小さな力で同期したときに大きな力を生むことができる。それゆえに、同期現象の研究は工学だけでなく、医学や物理学、生物学など幅広く報告されている。結合発振器のネットワークはクラスタリング現象、複雑なパターンや位相伝搬などの面白い位相同期が発見されており、多くの研究者に注目されている。さらに、回路をブレッドボード上に簡単に組み立てられることや、実物理システムであることなども研究されやすい要因の1つである。

本研究では、我々は van del Pol 発振器を用いてネットワークの結合構造に注目し、コンピュータシミュレーションによ

りスター構造とリング構造が共存する回路を提案する。

2. システムモデル

2.1 結合構造と特徴

本研究で使用する van del Pol 発振器を図1に示す。先行研究で知られているとおり、この van del Pol 発振器の結合構造の違いによって出力される信号波形の位相差が変わることが分かっている。

van del Pol 発振器を抵抗で繋ぎ、リング状にした場合、リングを構成する回路の数が偶数の時は、同相・逆相を出力する。回路の数が奇数の時は N 相を出力する。さらに、van del Pol 発振器を抵抗で繋ぎ、スター状にした場合、同相を出力することが知られている。

本研究では、これらの相反する性質・ネットワークを持つ回路同士を掛け合わせると、どのような同期状態が観測されるのかを調べる。

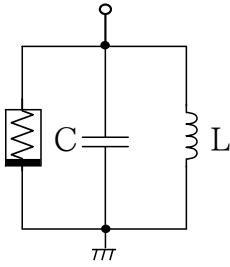


図1 van del Pol 発振器

2.2 提案モデル

図2はリング構造とスター構造を掛け合わせた提案モデルを示している。ここで van del Pol 発振器を VDP-A と VDP-B のように区別した。それぞれの VDP-B はインダクタ、抵抗とグラウンドで結合されている。さらに、VDP-A は抵抗とグラウンドによって結合されており、このシステムモデルでは唯一の回路となっている。周りのリングを構成する回路数を N とし、全体で $N+1$ となっている。

これらの回路の同期状態をコンピュータシミュレーションで確認する。

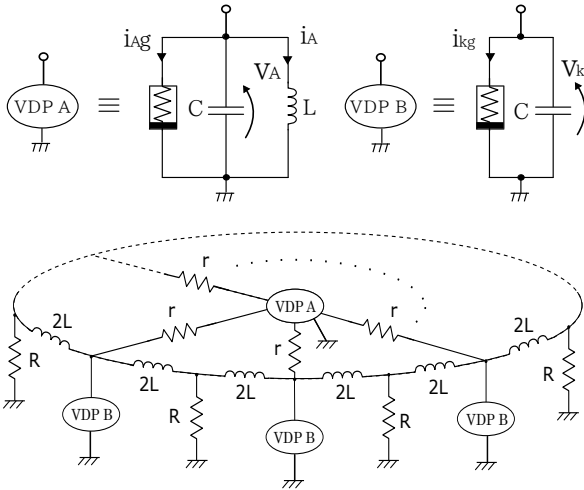


図2 提案モデル

コンピュータシミュレーションでは、電圧を v_k と電流を i_g とし、それぞれの非線形抵抗の特性を次の式に示す。

$$i_g = -g_1 v_k + g_3 v_k^3, \quad (1)$$

$(g_1, g_3 > 0).$

まず、VDP-A の回路方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} C \frac{dv_A}{dt} = -i_A - i_{Ag} + \frac{1}{r}(Nv_A - v_1 - v_2 - \dots - v_N), \\ L \frac{di_A}{dt} = v_A, \end{cases} \quad (2)$$

N は VDP-B の数を表している。

一方で、VDP-B は隣接する VDP-B と VDP-A に結合されている。VDP-B の回路方程式は次のように与えられる。

$$\begin{cases} C \frac{dv_k}{dt} = -i_{ka} - i_{kb} - i_{kg} - \frac{1}{r}(v_k - v_A), \\ 2L \frac{di_{ka}}{dt} = v_k - R(i_{ka} + i_{k+1,b}), \\ 2L \frac{di_{kb}}{dt} = v_k - R(i_{kb} + i_{k-1,a}), \end{cases} \quad (3)$$

$(k = 1, 2, \dots, N).$

次のパラメーターと変数を用いることで、正規化された回路方程式が得られる。

$$\begin{aligned} i_A &= \sqrt{\frac{g_1 C}{3g_3 L}} y_A, \quad i_{ka} = \sqrt{\frac{g_1 C}{3g_3 L}} y_{ka}, \quad i_{kb} = \sqrt{\frac{g_1 C}{3g_3 L}} y_{kb}, \\ v_A &= \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}} x_A, \quad v_k = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}} x_k, \\ t &= \sqrt{LC} \tau, \quad \text{“} \cdot \text{”} = \frac{d}{d\tau}, \quad \alpha = g_1 \sqrt{\frac{L}{C}}, \\ \beta &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = R \sqrt{\frac{C}{L}}, \end{aligned} \quad (4)$$

ここで α は非線形性、 β は VDP-A と VDP-B の間の結合強度を表している。さらに、 γ は VDP-B 間の結合強度を示している。VDP-A の正規化方程式は次のように表される。

$$\begin{cases} \dot{x}_A = \alpha x_A (1 - \frac{1}{3} x_A^2) - y_A + \beta (N x_A - x_1 - x_2 - \dots - x_N), \\ \dot{y}_A = x_A. \end{cases} \quad (5)$$

さらに、VDP-B それぞれの正規化方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \alpha x_k (1 - \frac{1}{3} x_k^2) - y_{ka} - y_{kb} - \beta (x_A - x_k), \\ \dot{y}_{ka} = \frac{1}{2} \{x_k - \gamma (y_{ka} + y_{k+1,b})\}, \\ \dot{y}_{kb} = \frac{1}{2} \{x_k - \gamma (y_{ka} + y_{k-1,b})\}. \end{cases} \quad (6)$$

3. シミュレーション結果

3.1 $N = 4$

我々はルンゲ=クッタ法を用いて式 (5)、(6) の微分方程式を計算した。このときのステップサイズは $h = 0.02$ とする。提案システムモデルにおいて、 $N = 4$ (リングを構成する回路の数が4つ) の時に観測したアトラクタを図3に示す。パラメータは $\alpha = 0.1$ 、 $\beta = 0.0085$ 、 $\gamma = 0.02$ としている。この図ではそれぞれの発振器の横軸は電圧、縦軸は電流を表している。図4はそのときのシステムモデルである。VDP-B 同士をインダクタで結合させ、それぞれの結合部を抵抗 R とグラウンドで落としてリングを構成している。さらに、それぞれの VDP-B を r で VDP-A と結合させてスターを構成させた回路モデルとなっている。本研究では、結合強度 β を変化させたときの位相差を観測する。

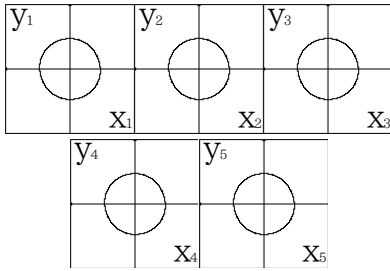


図3 $N = 4$ の時のアトラクタ (横軸: x_k , 縦軸: y_k) ($k = 1, 2, 3, 4, 5$)

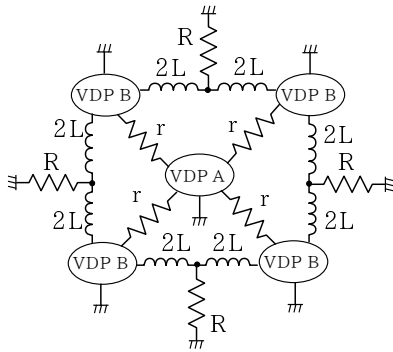


図4 $N = 4$ のシステムモデル

図5では r の結合強度 β を徐々に増加させた場合の変化を観測した。(a) $\beta=0.001$ の時、 r の結合強度が弱いため、リングが支配的な振る舞いをとった結果となっている。先行研究の結果どおりリングの特性が現れている。リングを構成する回路の数が偶数で、隣接する回路同士が逆相を出力している。また、対角の回路同士が同相を出力していることが分かる。このとき、スターを構成している真ん中の回路 VDP-A は初期値によって位相差が変化する。

次に、(b) $\beta=0.0085$ の時、同相同期の VDP-B 同士と VDP-A から 3 相同期を観測した。VDP-A は初期値によらないことも確認できた。これは、リング構造からスター構造へ変化する時のちょうど間に相当する値だと考えられる。

最後に、(c) $\beta=0.05$ の時、 r の結合強度が強いため、スターが支配的な振る舞いをしていいる。しかし、スターが支配的になったにも関わらず、同相と逆相が出力されていることが分かる。真ん中の van del Pol 発振器だけが逆相となり、残りの回路同士が同相となった。

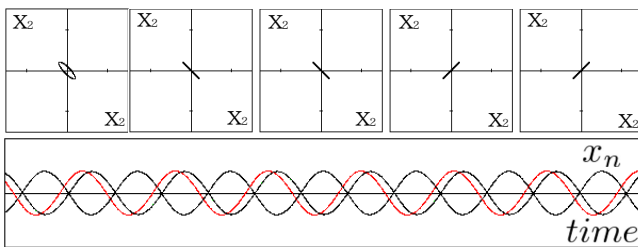
3.2 $N = 5$

図6に $N = 5$ の時のシミュレーション結果を示す。パラメータの値は $N = 4$ と同じように $\alpha = 0.1$ 、 $\gamma = 0.02$ と $\beta=0.001$ 、 0.0085 、 0.05 とする。

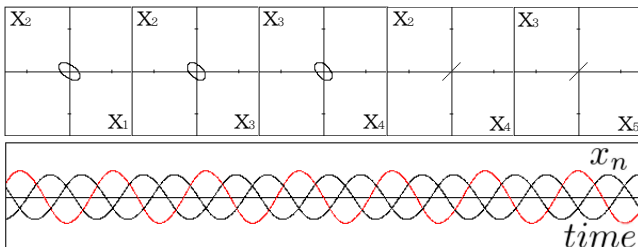
まず $\beta=0.001$ の場合、VDP-A と VDP-B を繋ぐ r の結合強度が弱く、リングを構成する回路の数が偶数なので、先行の結果どおり 5 相同期を観測することができた。 $N = 4$ と同様にスターを構成している真ん中の回路 VDP-A は初期値によって位相差が変化する。

次に、 $\beta=0.0085$ の場合、VDP-A と X_6 の VDP-B が逆相となり、 X_6 を除いた 4 つの回路が $N = 4$ の時と同様に同相同期を観測した。 $N = 4$ の場合とは違い、リングとスターの共存するパラメータの値とは言い難いことが分かる。

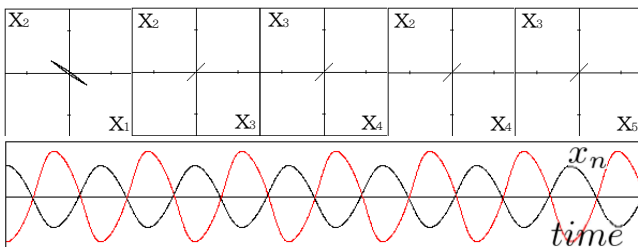
最後に $\beta=0.05$ の場合、 $N = 4$ と同様に 5 相同期していた VDP-B が全て同相同期へと変化した。そしてその時、VDP-A は β の値を増加させていくに連れて VDP-B と逆相同期を観測した。



(a) $\beta=0.001$.

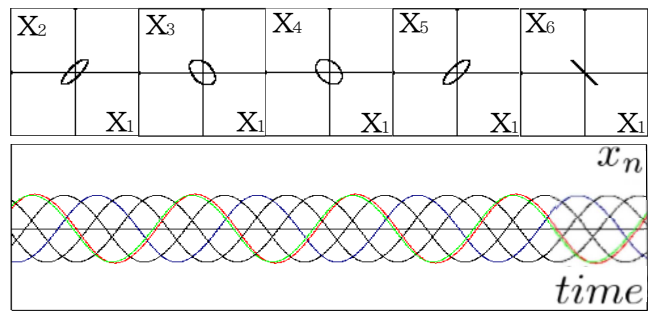


(b) $\beta=0.0085$.

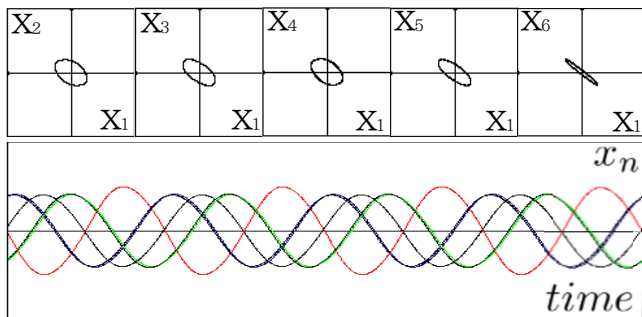


(c) $\beta=0.05$.

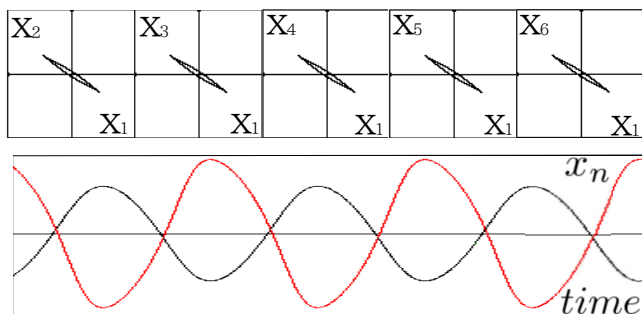
図5 $N = 4$ におけるリサージュ図と時間波形



(a) $\beta=0.001$.



(b) $\beta=0.0085$.



(c) $\beta=0.05$.

図6 $N=5$ のシミュレーション結果 ($\alpha=0.1$, $\gamma=0.02$)

4. ま と め

本研究では、我々はリング構造とスター構造を掛け合わせたシステムモデルを提案した。そして、リングを構成する回路の数が4つの場合と5つの場合に分けて考え、それぞれの回路においてリングの結合強度が増加した時の同期現象を観測した。

初めに、結合強度 β が十分に小さいとき、リングと似た振る舞いがみられた。これは β が小さいために、真ん中の VDP-A が短絡されているからである。それゆえに、リングの特性が観測できた。

次に、結合強度 β を徐々に増加させるにつれて、VDP-B それぞれの位相差が同相同期になった。これは、スターが支配的になったからだと分かる。

最終的に、結合強度 β が十分に大きいとき、VDP-A と VDP-B の位相差が逆相同期になった。さらに、回路の数が奇数の場合において、3 相同期が観測できた。しかしながら、回路数が偶数の場合は 3 相同期を観測することができなかった。

今後は、平均法を用いて位相差の関係を計算する。さらに、VDP-A と VDP-B が逆相同期になるメカニズムについて調査を行う。

文 献

- [1] L. L. Bonilla, C. J. Paerez Vicente and R. Spigler, "Time-Periodic Phases in Populations of Nonlinearly Coupled Oscillators with Bimodal Frequency Distributions", *Nonlinear Phenomena*, vol. 113, pp. 79-97, 1998.
- [2] J. A. Sherratt, "Invading Wave Fronts and Their Oscillatory Wakes are Linked by a Modulated Traveling Phase Resetting Wave", *Nonlinear Phenomena*, vol. 117, pp. 145-166, 1998.

- [3] G. Abramson, V. M. Kenkre and A. R. Bishop, "Analytic Solutions for Nonlinear Waves in Coupled Reacting Systems", *Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 305, pp. 427-436, 2002.
- [4] I. Belykh, M. Hasler, M. Lauret and H. Nijmeijer, "Synchronization and Graph Topology", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 15, no.11, pp. 3423-3433, 2005.
- [5] L. M. Pecora and T. L. Carrol, "Synchronization in Chaotic Systems", *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 821-824, 1990.
- [6] K. Kaneko, "Spatiotemporal Intermittency in Coupled Map Lattices", *Progress of Theoretical Physics*, vol. 74, no. 5, pp. 1033-1044, 1985.
- [7] K. Kaneko, "Clustering, Coding, Switching, Hierarchical Ordering, and Control in a Network of Chaotic Elements", *Physica D*, vol. 41, pp. 137-172, 1990.
- [8] M. Shinriki, M. Yamamoto and S. Mori, "Multimode Oscillations in a Modified van der Pol Oscillator Containing a Positive Nonlinear Conductance", *Proc. IEEE*, vol. 69, pp. 394-395, 1981.