

確率的に結合が切り替わる多角形発振器ネットワークの同期現象 Synchronization in Polygonal Oscillatory Network with Stochastically Switching Topology

上手 洋子[†] 西尾 芳文[†]
[†]徳島大学 工学部 電気電子システムコース

Yoko UWATE[†] Yoshifumi NISHIO[†]
[†]Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Tokushima University

1 はじめに

結合発振器系で観測される同期現象は、自然界の非線形現象を解析するのに優れたモデルである [1],[2]. よって、多くの研究者によって様々なタイプの結合発振器ネットワークが提案され、興味深い同期現象が報告されている [3]-[6].

我々はこれまでに、共有ブランチを有する結合多角形発振器ネットワークの同期現象について調査を行ってきた [7], [8]. このシステムでは、多角形ネットワークの各頂点に van der Pol 発振器をつなぎ、それらを一つの辺を共有して結合している (参考: 図 1). コンピュータシミュレーションおよび理論解析によって、これらの結合発振器は全体のシステムの消費電力を最小にするように同期することを確認している.

一方、近年、嗅内皮質の神経細胞の一種であるグリッドセルが六角形の活動パターンを示すことが明らかになっている [9], [10]. ニューロンの発火パターンの六角形構造は、新しい脳情報処理機能のフレームワーク実現にとって重要な役割を担っている [11]. すなわち、電気回路を使用して神経生物学的システムをモデル化するためには、多角形発振ネットワークから見た同期パターンを研究することが重要である. また、複雑な神経生物学システムをモデル化するためには、確率もしくは時変な結合を持つネットワークの提案および解析が重要である. しかし、参考文献 [7]では、静的なネットワークモデルへの調査しか行っていない.

本研究では、確率的に結合が切り替わる多角形発振器ネットワークを提案し、その同期状態について調査を行う. まず、基本的な現象を確認するために、2個の多角形発振器ネットワークが結合されたシステム (結合発振器数が5個、切り替わり結合数が1つ)

での同期現象について、各発振器間の位相差を測定することで調査する. さらに、6個の多角形発振器ネットワークが結合されたシステム (結合発振器数が10個、切り替わり結合数が3つ) についても同様の調査を行う.

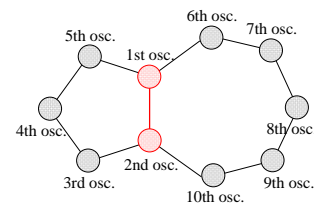


図 1: 多角形発振器ネットワークの一例 (5-7 coupling network).

2 2個の多角形発振器ネットワークが結合されたシステム

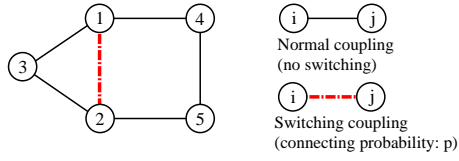
- 発振器数:5, 切り替わり結合数:1 -

2.1 回路モデル

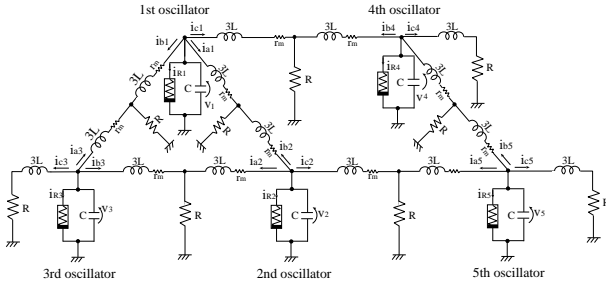
本研究で用いる回路の概念モデルを図 2 に示す. 三角形ネットワークと四角形ネットワークが1辺の共有ブランチによって結合された結合多角形発振器ネットワークである. ここでは、このシステムを“3-4 coupling network”と呼ぶことにする. このシステムでの回路間の結合方法は、それぞれの van der Pol 発振器のインダクタを介して、抵抗 R で接地したものであり、隣接する回路間は逆相同期になるように同期することが知られている.

図 2(a) での、一点鎖線はスイッチング結合 (SC: Switching Coupling) を意味している. もし、ある結合がスイッチング結合に選ばれた場合、結合のオン・オフは結合確率 p によって決定される. シミュレー

シオンでは、スイッチング結合の切り替えタイミングは、 1000τ に行う。



(a) 回路モデルの概念図.



(b) 回路による実現モデル.

図 2: 回路モデル (3-4 coupling network).

今回の研究では、3-4 coupling network において、1 つの結合のみがスイッチング結合になる場合を考える。スイッチング結合の場所およびオン・オフによる4つのネットワークポロジータブルを表2にまとめる。“state-1”は結合がつながっている状態の，“state-2”は結合が切れている状態のネットワークポロジータブルを表している。

次に、図2の回路モデルの回路方程式を導出する。この回路において非線形抵抗の $v_k - i_{Rk}$ 特性は式(1)に示すような3次特性の多項式で近似される。

$$i_{Rk} = -g_1 v_k + g_3 v_k^3 \quad (g_1, g_3 > 0), (k = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (1)$$

正規化後の回路方程式は以下のように導出される。
[kth oscillator]

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{d\tau} = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{3} x_k^2 \right) x_k - (y_{ak} + y_{bk} + y_{ck}) \\ \frac{dy_{ak}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{ x_k - \eta y_{ak} - \gamma_{kn} (y_{ak} + y_n) \right\} \\ \frac{dy_{bk}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{ x_k - \eta y_{bk} - \gamma_{kn} (y_{bk} + y_n) \right\} \\ \frac{dy_{ck}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{ x_k - \eta y_{ck} - \gamma_{kn} (y_{ck} + y_n) \right\} \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (2)$$

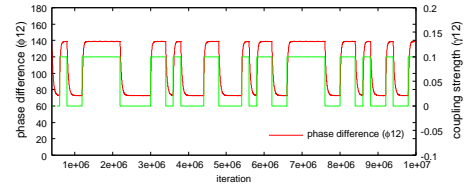
この回路方程式において、 ε および γ_{kn} は van der Pol 発振器の非線形性および発振器間の結合強度を表

している。シミュレーションによる調査では、式(2)を4次のルンゲ=クッタ法(ステップサイズ: $h = 0.005$)で解く。またパラメータは、 $\varepsilon = 0.1$ のように設定した。

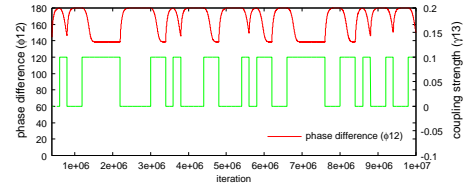
2.2 同期現象

本節では、スイッチング結合を含む 3-4 coupling network の同期現象の調査を行う。図3にスイッチング結合の結合確率が $p = 0.5$ の場合の1番目と2番目の発振器間の位相差の切り替わりの一例を示す。位相差はポアンカレ断面 ($x_k < 0, y_k = 0$) を用いて算出した。

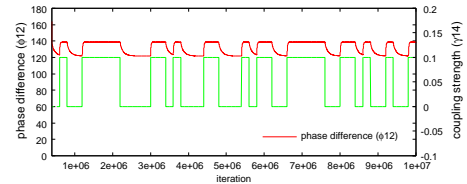
Pattern-A の場合、位相差はスイッチング結合の状態によって、2状態 ($\phi_{12} \approx 138.6^\circ, \phi_{12} \approx 72^\circ$) を切り替わっている様子が確認できる(図3(a))。同様に、他のパターンにおいてもスイッチング結合の状態によって、2状態の位相差を切り替わっていることがわかる(図3(b), (c), (d))。



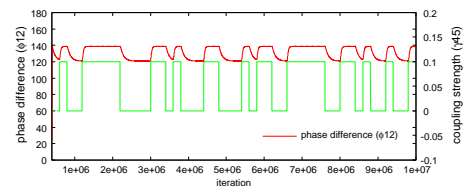
(a) Pattern-A.



(b) Pattern-B.



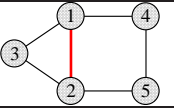
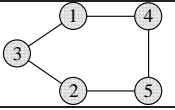
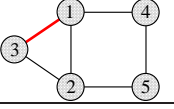
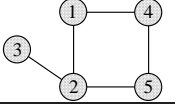
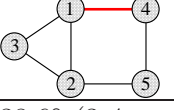
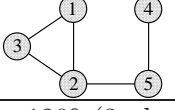
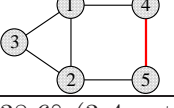
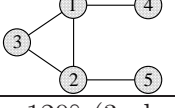
(c) Pattern-C.



(d) Pattern-D.

図 3: 位相差のスイッチングの一例 ($p=0.5$).

表 1: Switching Coupling (SC) Patterns.

Pattern	state-1 (SC: connecting)	state-2 (SC: disconnecting)
pattern-A (SC: γ_{12})		
	$\phi_{12} \approx 138.6^\circ$ (3-4 network)	$\phi_{12} \approx 72^\circ$ (5-phase)
pattern-B (SC: γ_{13})		
	$\phi_{12} \approx 138.6^\circ$ (3-4 network)	$\phi_{12} \approx 180^\circ$ (anti-phase)
pattern-C (SC: γ_{14})		
	$\phi_{12} \approx 138.6^\circ$ (3-4 network)	$\phi_{12} \approx 120^\circ$ (3-phase)
pattern-D (SC: γ_{45})		
	$\phi_{12} \approx 138.6^\circ$ (3-4 network)	$\phi_{12} \approx 120^\circ$ (3-phase)

ここで、同期の位相状態はスイッチング結合の状態によって3つに分類される。“state-1”、“state-2”と“その他”である。スイッチング結合がつながっている場合の状態が“state-1”、切れている場合が“state-2”に対応する。“その他”は、“state-1”と“state-2”になるまでの切り替わり時に起こる過渡状態を表す。

結合確率 p を変化させたときの各パターンにおける状態確率を図4に示す。この結果は、繰り返し回数を 1×10^8 とした場合の100回の平均を表している。これらの図より、“state-1”と“state-2”のグラフの交点がセンター ($p = 0.5$) からずれていることがわかる。結合確率が $p = 0.5$ の場合、どちらの状態も50%になるはずである。しかしながら、どのパターンにおいても2つの状態は異なる割合になっていることがわかる。Pattern A, CとDの場合においては、 $p = 0.5$ のとき、“state-1”の状態確率が“state-2”より大きいことが確認できる。すなわち、これらの場合は結合発振器は“state-1”(3-4 network)により落ち着きやすいことがいえる。一方、Pattern Bの場合には、 $p = 0.5$ のとき、“state-2”の状態確率が“state-1”より大きいことが確認できる。よって、この場合は結合発振器は“state-2”(逆同期)により落ち着きやすいことがいえる。

次に、結合確率 p を変化させたときの、それぞれの同期状態の確率とスイッチング結合のオン・オフの確率の差 (error) を計算した結果を図5に示す。この

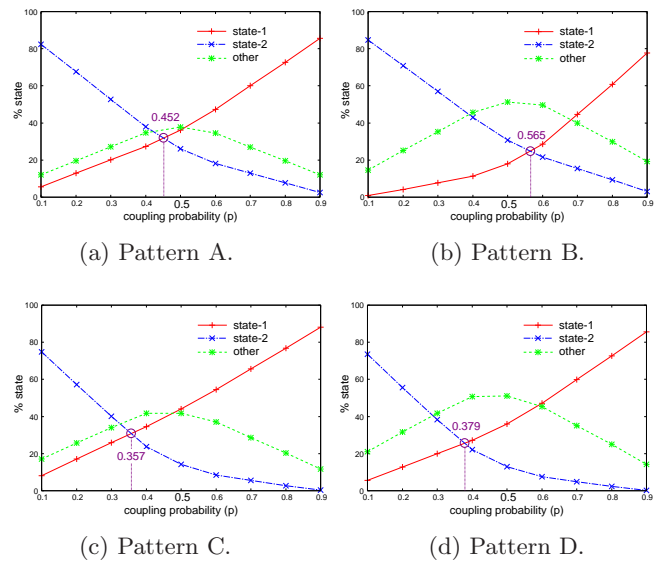


図 4: 結合確率 p の変化による各同期状態の確率。

結果は、先程と同様に繰り返し回数を 1×10^8 とした場合の100回の平均を表している。これらの結果より、Pattern A, CおよびDにおいては、“state-1”のerrorは“state-2”より小さいことがわかった。すべてのパターンにおける“state-1”と“state-2”のerrorの差は、図4での交点のずれに対応している。さらに、error曲線は結合確率 $p = 0.5$ 付近でピークをとることがわかった。

これらの結果より、シミュレーションによって得

られた同期状態の確率とスイッチング結合のオン・オフの確率の差が異なる原因はそれぞれの状態になるまでの過渡状態であると考えられる．ここで，各状態への過渡状態が平等に効いていないことが興味深いポイントである．すなわち，各同期状態による同期の安定性や引き込み領域の違いが影響していると推測できる．この回路モデルにおいては，図 4, 5 の結果より，逆相同期が一番安定に観測され， N 相同期が一番不安定であることがわかる．

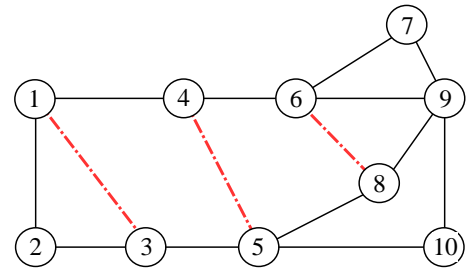


図 6: 6 個の多角形発振器ネットワークモデル．

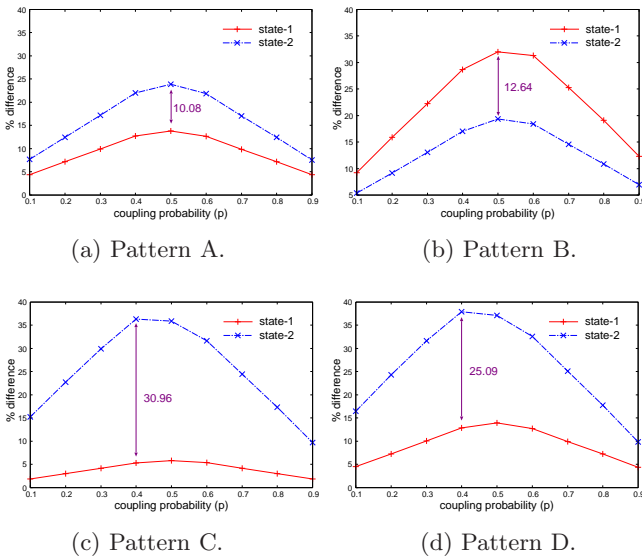


図 5: 結合のオン・オフ確率と各同期状態の確率との差 (error)．

3 6 個の多角形発振器ネットワークが結合されたシステム

- 発振器数:10, 切り替わり結合数:3 -

ここでは，先程の回路モデルを拡張した 6 個の多角形発振器ネットワークが結合されたシステムにおけるスイッチング結合の影響による同期現象の調査を行う．

3.1 回路モデル

拡張システムとして，10 個の発振器によって構成される図 6 に示されるような回路モデルを考える．3 個の三角形ネットワークと 3 個の四角形ネットワークが結合された 6 個の多角形結合発振器ネットワークである．この回路モデルでは，スイッチング結合が 3 つ存在する ($\gamma_{13}, \gamma_{45}, \gamma_{68}$)．これらのスイッチング結合は図 6 において，一点鎖線で記述されている．また，シミュレーションにおいて，スイッチング結合の切り替わりは 10000 τ ごとに行う．スイッチング

結合の状態による 8 種類のネットワークポロジータブルを表 2 にまとめた．

3.2 同期現象

結合確率が $p = 0.5$ のときの 1 番目と 3 番目の発振器の位相差 (ϕ_{13}) のスイッチング現象の一例を図 7 に示す．この図より，スイッチング結合の状態に応じて，8 つの同期状態をスイッチングしていることがわかる．

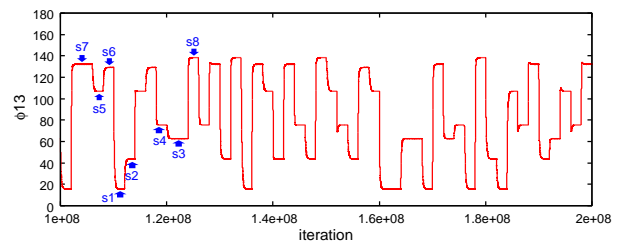


図 7: 位相差のスイッチングの一例 ($p=0.5$)．

次に結合確率 p を変化させたときの状態確率を図 8 に示す．“state-1”，“state-8”および“その他”の状態は，先の 3-4 coupling network のときと同じような特性になることがわかる．その他の同期状態は 2 つのグループに分けることができる．ひとつのグループは，同期状態の曲線のピークが $p = 0.5$ から大きいほうにシフトしているのに対し，もうひとつのグループは，ピークが $p = 0.5$ より小さいほうにシフトしている．

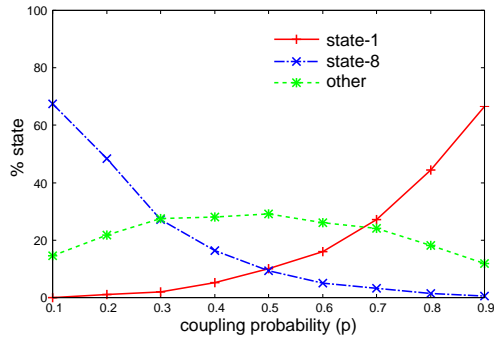
最後に，結合確率 p を変化させたときの，それぞれの同期状態の確率とスイッチング結合のオン・オフの確率の差 (error) を計算した結果を図 9 に示す．この場合，error 曲線のピークは $p = 0.5$ のセンターよりシフトしていることがわかる．これは，3-4 coupling network では観測されなかった新しい現象である．

4 まとめと今後の課題

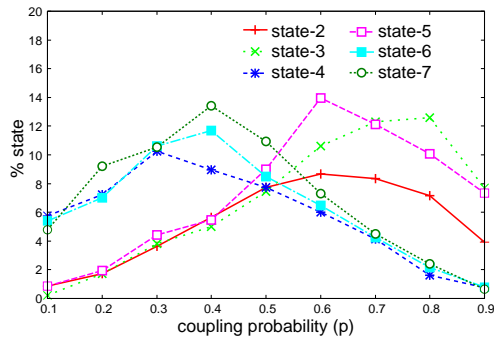
本研究では，確率的に結合が切り替わる多角形発振器ネットワークを提案し，その同期状態について調

表 2: Network Topology

State	Network topology	Phase difference
State-1 $\gamma_{13}:\text{on}$ $\gamma_{45}:\text{on}$ $\gamma_{68}:\text{on}$		$\phi_{13} \approx 138^\circ$ $\phi_{45} \approx 166^\circ$ $\phi_{68} \approx 171^\circ$
State-2 $\gamma_{13}:\text{on}$ $\gamma_{45}:\text{on}$ $\gamma_{68}:\text{off}$		$\phi_{13} \approx 132^\circ$ $\phi_{45} \approx 150^\circ$ $\phi_{68} \approx 120^\circ$
State-3 $\gamma_{13}:\text{on}$ $\gamma_{45}:\text{off}$ $\gamma_{68}:\text{on}$		$\phi_{13} \approx 129^\circ$ $\phi_{45} \approx 142^\circ$ $\phi_{68} \approx 158^\circ$
State-4 $\gamma_{13}:\text{on}$ $\gamma_{45}:\text{off}$ $\gamma_{68}:\text{off}$		$\phi_{13} \approx 106^\circ$ $\phi_{45} \approx 89^\circ$ $\phi_{68} \approx 76^\circ$
State-5 $\gamma_{13}:\text{off}$ $\gamma_{45}:\text{on}$ $\gamma_{68}:\text{on}$		$\phi_{13} \approx 75^\circ$ $\phi_{45} \approx 148^\circ$ $\phi_{68} \approx 161^\circ$
State-6 $\gamma_{13}:\text{off}$ $\gamma_{45}:\text{on}$ $\gamma_{68}:\text{off}$		$\phi_{13} \approx 62^\circ$ $\phi_{45} \approx 125^\circ$ $\phi_{68} \approx 100^\circ$
State-7 $\gamma_{13}:\text{off}$ $\gamma_{45}:\text{off}$ $\gamma_{68}:\text{on}$		$\phi_{13} \approx 43^\circ$ $\phi_{45} \approx 88^\circ$ $\phi_{68} \approx 132^\circ$
State-8 $\gamma_{13}:\text{off}$ $\gamma_{45}:\text{off}$ $\gamma_{68}:\text{off}$		$\phi_{13} \approx 15^\circ$ $\phi_{45} \approx 31^\circ$ $\phi_{68} \approx 43^\circ$



(a) state-1, state-8, and other.



(b) state-2, state-3, state-4, state-5, state-6, state-7.

図 8: 結合確率 p の変化による各同期状態の確率.

査を行った. まず, 基本的な現象を確認するために, 2個の多角形発振器ネットワークが結合されたシステム(結合発振器数が5個, 切り替わり結合数が1つ)での同期現象について, 各発振器間の位相差を測定することで調査し, さらに, 6個の多角形発振器ネットワークが結合されたシステム(結合発振器数が10個, 切り替わり結合数が3つ)についても同様の調査を行った. シミュレーションの結果, スイッチング結合による同期状態によって同期確率が異なることがわかった.

今後の課題として, 同期状態の安定性の強さや引き込み領域と同期確率の関係性を明らかにすることがある. さらに, 提案システムをより大規模ネットワークに拡張することも今後の課題である.

参考文献

[1] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. Valladares and C. Zhou, "The Synchronization of Chaotic Systems" *Physics Reports*, 366, pp. 1-101, 2002.

[2] A. Arenas, A. Diaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno and C. Zhou, "Phase Synchronization of Chaotic Oscillators" *Physics Reports*, 469, pp. 93-153, 2008.

[3] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky and J. Kurths, "Phase Synchronization of Chaotic Oscillators"

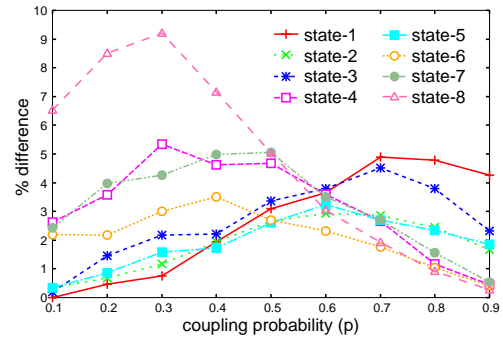


図 9: 結合のオン・オフ確率と各同期状態の確率との差 (error).

Physical Review Letters, vol.76, no.11, pp.1804-1807, Mar. 1996.

[4] W. Wang, I.Z. Kiss and J.L. Hudson, "Experiments on Arrays of Globally Coupled Chaotic Electrochemical Oscillators: Synchronization and Clustering" *Chaos*, vol.10, no.1, pp.248-256, Mar. 2000.

[5] M. Yamauchi, Y. Nishio and A. Ushida, "Phase-waves in a Ladder of Oscillators" *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E86-A, no.4, pp.891-899, Apr. 2003.

[6] H.B. Fotsina and J. Daafouza, "Adaptive Synchronization of Uncertain Chaotic Colpitts Oscillators based on Parameter Identification" *Physics Letters A*, vol.339, pp.304-315, May 2005.

[7] Y. Uwate and Y. Nishio, "Synchronization in Several Types of Coupled Polygonal Oscillatory Networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 59, no. 5, pp. 1042-1050, May 2012.

[8] Y. Uwate and Y. Nishio, "Frustrated Synchronization in Two Coupled Polygonal Oscillatory Networks," *Proc. of ISCAS'13*, pp. 1781-1784, May 2013.

[9] T. Hafting, M. Fyhn, S. Molden, M.B. Moser and E.I. Moser, "Microstructure of a Spatial Map in the Entorhinal Cortex," *Nature*, Vol. 436, no. 11, pp. 801-806, Aug. 2005.

[10] F. Sargolini, M. Fyhn, T. Hafting, B.L. McNaughton, M.P. Witter, M.B. Moser and E.I. Moser, "Conjunctive Representation of Position, Direction, and Velocity in Entorhinal Cortex," *Science*, Vol. 312, pp. 758-762, May 2006.

[11] H. Mhatre, A. Gorchetchnikov and S. Grossberg, "Grid Cell Hexagonal Patterns Formed by Fast Self-Organized Learning Within Entorhinal Cortex," *Hippocampus*, Vol. 22, pp. 320-334, 2012.