

結合されたファンデアポール発振器の振幅を変えることによって 得られる同期現象

ヴ ミン トゥアン† 上手 洋子† 西尾 芳文†

† 徳島大学工学部 〒770-8501 徳島市新蔵町2丁目24

E-mail: †{thuan,uwate,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

あらまし 本研究では3相以上のファンデアポール発振器から結合されるシステムにおいて一部の発振器の振幅が異なった時の同期現象について考える。

キーワード 同期現象, ファンデアポール, 発振器

Synchronization of Coupled van der Pol Oscillators by Changing their Oscillation Amplitudes

Vu MINH THUAN†, Uwate YOKO†, and Nishio YOSHIFUMI†

† Faculty of Engineering, Tokushima University 24-2 Shinkura, Tokushima, 770-8501 Japan

E-mail: †{thuan,uwate,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

Abstract This research considers about the synchronization phenomena in a system which contains three or more van der Pol oscillators when a part of them has different amplitudes from the others.

Key words synchronization phenomena, van der Pol, oscillator

1. ま え が き

自然界では、カエルの合唱、ホテルの同期発光などの現象がよく観察される。これらの現象のようにある振動系において、各振動が互いに影響を及ぼし合って、外部からの作用なしに自発的に揃って振動する現象が同期現象と呼ばれる。

これまでの研究では結合されたファンデアポール発振器で一部の周波数や結合強度などが異なった時の同期現象についての調査が行われてきた。本研究では発振器の振幅をパラメータとして取り扱い、全ての振幅が同じでない時に各発振器の間の位相関係はどうなるかを調査する。まず回路システムの方程式を導いて、プログラムを作成してシミュレーションを行う。また、回路実験で同様の結果を確認する。最後に数学的な証明を行い、結果の考察をし、応用及び製品開発について考える。

同期現象の特徴としては、全ての振動の位相が揃った場合に各振動の足し合わせによって大きなエネルギーを生み出すことや、逆相となった場合に互いのエネルギーを打ち消し合うことなどが挙げられる。世の中の現象がある意味で電気電子回路モデルを用いて再現できるため、本研究の成果は電気電子工学分野だけではなく生物や化学及び機械工学分野でも広く応用されることが期待できる。

2. 回路モデル

本研究では以下の図1のような回路モデルを用いる。第1相目から第N相目までのファンデアポール発振器は純抵抗Rで結合され、k相目の発振器の非線形抵抗 i_{Rk} の電流・電圧関係は式(1)で表される。図2のように β_k の値によってk相目の振幅を変えることができる。但し、 β_k の既定値を1とする。

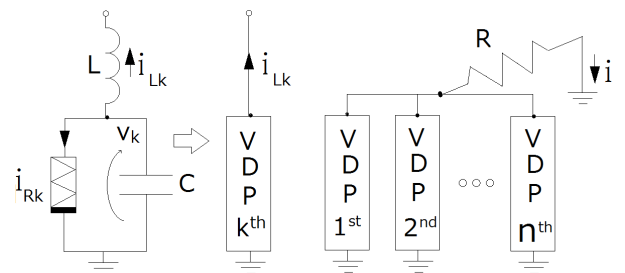


図1 回路モデル

$$i_{Rk} = -g_1 \left(\frac{v_k}{\beta_k} \right) + g_3 \left(\frac{v_k}{\beta_k} \right)^3, \quad k = 1, \dots, N \quad (1)$$

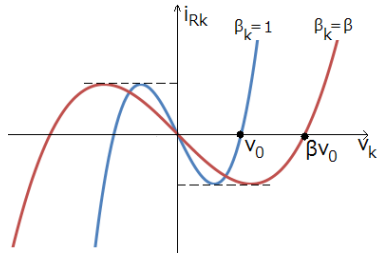


図2 パラメータ と振幅の関係

また、回路方程式は以下である：

$$C \frac{dv_k}{dt} = -i_{Lk} - i_{Rk} \quad (2)$$

$$L \frac{di_{Lk}}{dt} = -v_k - R \sum_{j=1}^N i_{Lj} \quad (3)$$

ここで、回路方程式を次のように変数変換を行うと、以下の式(7)-(8)で正規化式が得られる。

$$t = \sqrt{LC} \tau \quad (4)$$

$$v_k = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}} x_k, \quad i_{Lk} = \sqrt{\frac{Cg_1}{3Lg_3}} y_k \quad (5)$$

$$\alpha = R \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \varepsilon = g_1 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6)$$

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{\beta_k} x_k \left(1 - \frac{1}{3\beta_k^2} x_k^2 \right) - y_k \quad (7)$$

$$\frac{dy_k}{d\tau} = x_k - \alpha \sum_{j=1}^N y_j \quad (k = 1, \dots, N) \quad (8)$$

次はルンゲクッタ法を用いて正規化式のシミュレーションを行い、平均化法による解析解を求める。

3. 3相システムの同期現象

まず、3相のファンデアポール発振器から構成されたシステムを考え、3相目の発振器の振幅だけを変えてみる。具体的なパラメータは、 β_3 を [0.2, 2.0] の間で変化させる。その場合、平均化法により各発振器間の位相差が式(9)-(10)のように求められる。そのグラフは図3である。

$$\varphi_{31} = \pm \cos^{-1} \left(-\frac{\beta_3}{2} \right) \quad (9)$$

$$\varphi_{12} = 2k\pi \mp 2\cos^{-1} \left(-\frac{\beta_3}{2} \right) \quad (10)$$

但し、 φ_{12} 、 φ_{31} はそれぞれ1相目-2相目と3相目-1相目の発振器の間の位相差であり、図面では「Phase 1-2」と「Phase 3-1」で表示される。

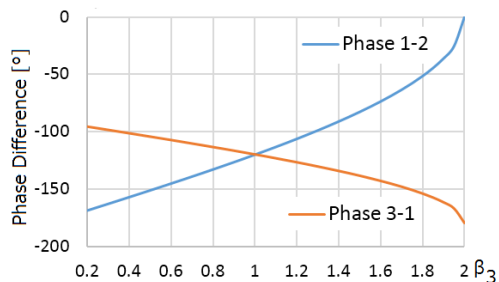


図3 3相システムの解析結果

また、ルンゲクッタ法によるシミュレーション結果は図4のように得られ、解析結果と同じものである。

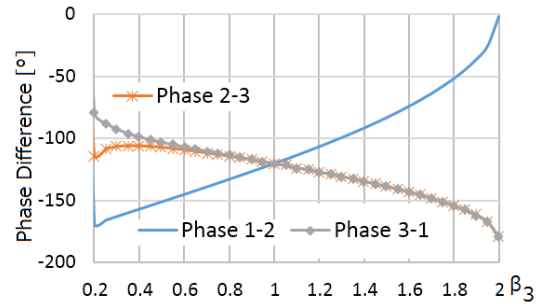


図4 3相システムのシミュレーション結果

次に、図5は $\beta_3 = 0.5$ の場合の回路実験結果である。図面から位相差を計算してみると、 $(\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{31}) = (-150^\circ, -105^\circ, -105^\circ)$ であり、この値を図3と図4に比較すると解析結果、シミュレーション結果と回路実験結果は同様であることが分かる。

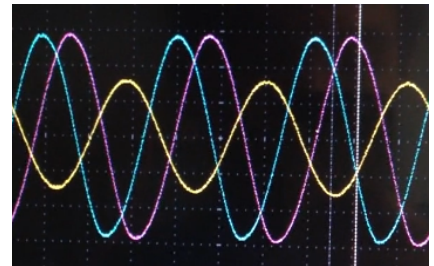


図5 3相システムの回路実験結果

4. 4相システムの同期現象

発振器数が4に増えると、1相だけではなく、2相の振幅も変えることができる。

まず、発振器3相目と4相目の振幅を同時に変化すると図6のように各発振器の間の位相差をシミュレーション方法で求められる。

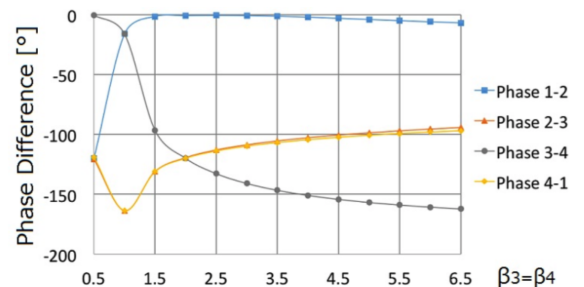


図6 4相システムのシミュレーション結果

実際はある二つの発振器が同相になると、それは合計の振幅を持つ一つの発振器として考えられるため、図6の一部は図5と同様な結果を表すことが確認される。例えば、 $\beta_3 = \beta_4 = 0.5$ の時：図6ではPhase 4-1 = 0の為、発振器3相目と4相

目を足し合わせることができ、同じ振幅を持つ 3 相システムとなり、図 6 により各発振器が -120° でずれることが分かる。この結果は図 5 の $\beta_3 = 1$ における結果と同様である。また、 $\beta_3 = \beta_4 = 1$ の時も 1 相目と 2 相目の足し合わせることによって 3 相システムと同様な結果になる。

また、発振器 3 相目と 4 相目の振幅を別々に変化するとパラメータは二つに増え、次のように同期分布が得られる。

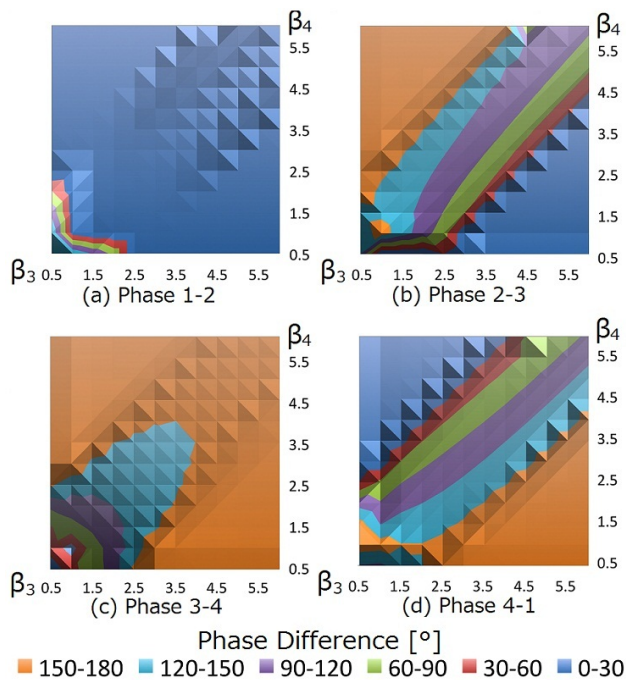


図 7 4 相の同期分布

図 7 で同期現象が観察される範囲は広くなり、パラメータを次のような条件を満たせば 4 相の中で 3 相が互いに同期で、残りの 1 相と逆同期になることが分かる。

$$\beta_4 \leq \beta_3 - 2 \quad (11)$$

$$\beta_4 \geq \beta_3 + 2 \quad (12)$$

5. 発振器数が 5 以上の場合

相数が増えると解析が複雑になるが、以前に述べた結果を用いて発振器のグループ別けで位相差を調べることができる。例えば、7 相システムでは最初の 5 相と残りの 2 相で 2 グループを別けて $\beta_6 = \beta_7 = 2.5$ におけるシミュレーション結果は図 7 で表される。この場合、最初の 5 相は同期で残りの 2 相と逆相になることが分かる。

また、図 8-10 では 7 相のシステムを 3:3:1 で 3 グループに別け、7 相目の振幅だけ変えた時のシミュレーション結果である。各グループ内の発振器が同相であるため、グループ間の位相差（つまり発振器 3-4, 6-7, 7-1 相目の間の位相差）を調べたら良い。その結果は図 11 である。このグラフの横軸値を $\frac{1}{3}\beta_7$ にすれば、3 相システムの結果と同様であることがわかる。結論、以前の結果を用いてフループ別けで大規模の問題を解決できることがわかる。

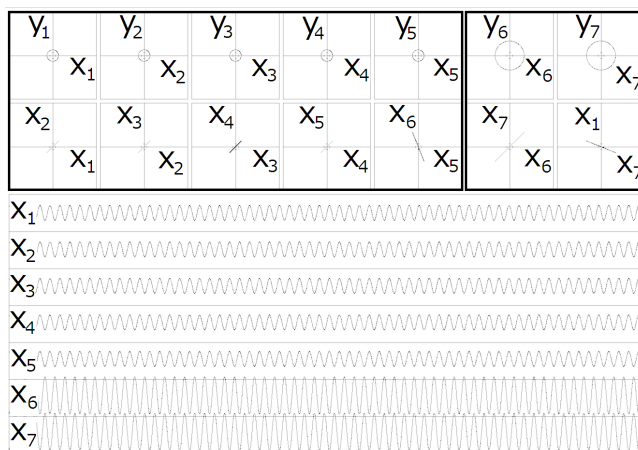


図 8 2 グループ別けで $\beta_6 = \beta_7 = 2.5$ の結果

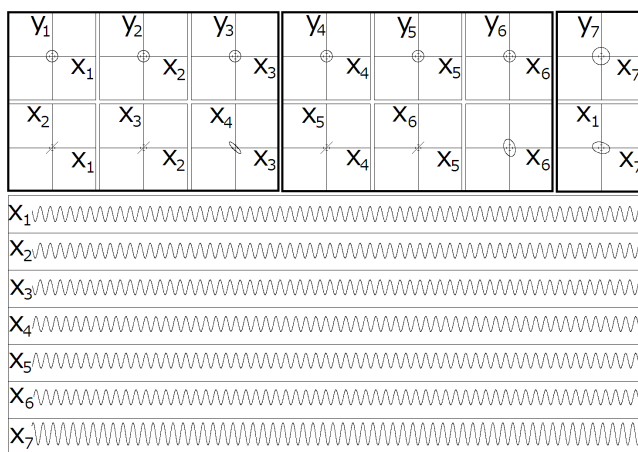


図 9 3 グループ別けで $\beta_7 = 1.5$ の結果

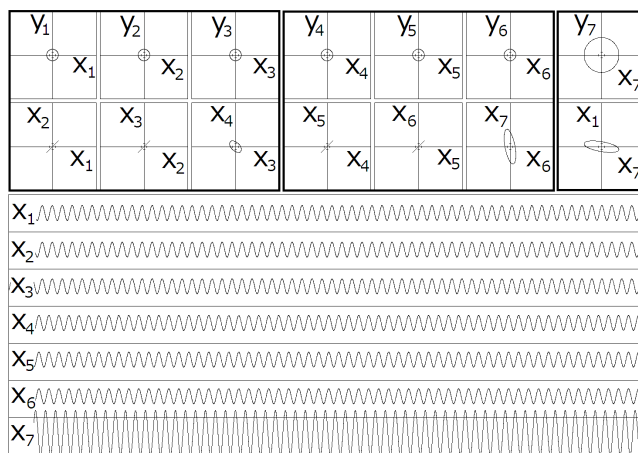


図 10 3 グループ別けで $\beta_7 = 3.0$ の結果

また、一般的な N 相から構成されるシステムにおいて、最初の $N - 1$ 相が同じ振幅で N 相目の振幅をその $N - 1$ 倍にすると 1 相目から $N - 1$ 相目までは同相、 N 相目と逆相であることを数値解析で証明できる。図 12 は $N = 7$ のシミュレーション結果である。

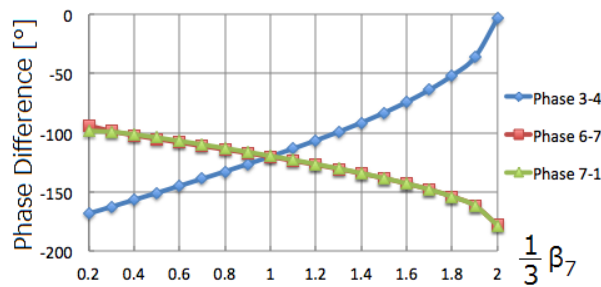


図 11 3 グループ別けた時の位相差結果

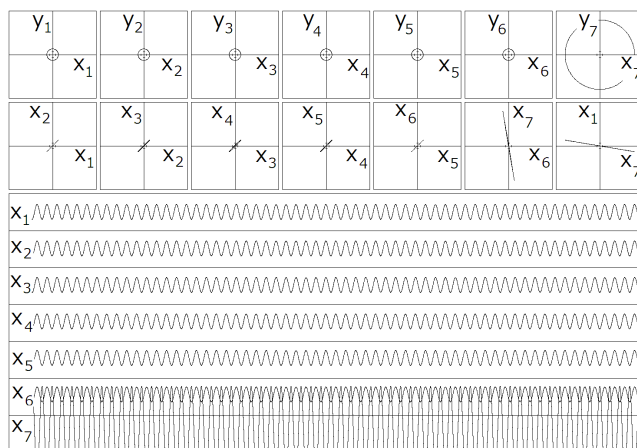


図 12 7 相システムのシミュレーション結果

6. ま と め

本研究では、結合されたファンデアポール発振器において一部の振幅を変えると同期現象が観察される。また、システムが大きくなると発振器をグループに別けて解析することができる。将来の研究として、まず 4 相の場合の解析結果と回路実験結果を取り出し、パラメータを増やして全ての発振器が異なる振幅を持つような問題を解決することでより豊富な同期現象が得られることが期待される。

7. 7. 謝 辞

本研究の一部は、JSPS 科研費 26540127 の助成を受けたものである。

文 献

- [1] Vu Minh Thuan, Y. Uwate and Y. Nishio, " Synchronization phenomena in van der Pol oscillators with different amplitudes ", Proc. of NOLTA '14, pp. 365-368, Sep. 2014.
- [2] Y. Uwate, Y. Nishio and R. Stoop, " Synchronization in three coupled van der Pol oscillators with different coupling strength ", Proc. of NCSP '10, pp. 109-112, Mar. 2010.
- [3] K. Matsumura, T. Nagai, H. Kumeno, Y. Uwate and Y. Nishio, " Frustrated synchronization in coupled oscillator chains with unbalanced parametric distribution ", Proc. of NCSP '12, pp. 679-682, Mar. 2012.
- [4] J. Shao, X. He, C. Bohm, Q. Yang and C. Plant, " Synchronization-inspired partitioning and hierarchical clustering ", IEEE Transaction on Knowledge and Data Engineering, vol. 25, no. 4, pp. 893-905, Apr. 2003.

- [5] N. Corson, S. Balev and M. Azizalaoui, " Detection of synchronization phenomena in networks of hindmarsh-rose neuronal models ", Proc. Of ECCS '10, pp. 112-118, Sep. 2010.
- [6] N. Vasegh and F. Khellat, " Chaos synchronization of chemical models ", International Journal of Applied Science and Technology, vol. 1, no. 5, pp. 233-243, Sep. 2011.
- [7] N. Wessel, " Synchronization and coupling analysis: Applied cardiovascular physics in sleep medicine ", Proc. of EMBC '13, pp. 6567-6570, Jul. 2013.
- [8] F. Zhou, " Multistate and multistage synchronization of hindmarsh-rose neurons with excitatory chemical and electrical synapses ", Proc. of IEEE '12, pp. 1335-1347, Jan. 2012.