

# 異なる結合強度によって一次元上に結合配置された カオス回路で観測される同期現象

## Synchronization of Chaotic Circuits Coupled by Different Coupling Strength as One-Dimensional Array

上手 洋子<sup>†</sup>                      西尾 芳文<sup>†</sup>  
<sup>†</sup>徳島大学 工学部      電気電子工学科

Yoko UWATE<sup>†</sup>                      Yoshifumi NISHIO<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Tokushima University

### 1 はじめに

結合発振器システムは、自然科学で観測される高次元の非線形現象を記述するのに優れたモデルである。また、結合発振器システムで観測される同期現象の調査が盛んに行われている [1]-[5]。なかでも、結合カオス回路を用いたシステムは、カオス同期をはじめ多くの興味深い現象を観測することができる。そのため、同期現象は工学のみならず、物理学、生物学、脳神経科学、社会学など様々な分野で研究が行われている。

我々研究グループは、結合カオス回路ネットワークで観測される同期現象について調査を行ってきた。この提案回路システムでは、カオス回路は二次元平面上に配置される。結合強度をカオス回路間の距離に応じて設定したときの位相差を測定することで、クラスタリング処理が可能であることをコンピュータシミュレーションおよび回路実験により確認している [6], [7]。ここで得られた結果についてより詳細な理解を得るために、よりシンプルな回路モデルでの調査が必要であると考え。

そこで本研究では、カオス回路を一次元上に配置したときの同期現象について調査を行う。まず、カオス回路を規則的に配置したシステムで基本的な同期現象を確認する。続いて、カオス回路を不規則的に配置したシステムを考える。さらに不規則的に配置した回路システムには、対称配置と非対称配置の二種類の配置方法について調査する。コンピュータシミュレーションの結果、不規則的に配置した回路システムにおいて興味深い同期現象を確認することができた。すなわち、回路配置が対称が非対称かに

よって、得られる同期現象が異なることがわかった。

### 2 回路モデル

本研究で用いるカオス回路を図1に示す。このカオス回路は西尾-稲葉カオス回路と呼ばれている [8]-[10]。

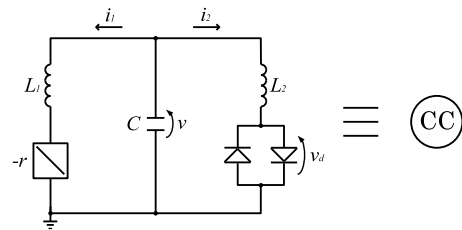


図 1: カオス回路。

この回路は、キャパシタ、インダクタ、負性抵抗、二つのダイオードで構成された非線形抵抗により構成されている。この非線形抵抗の  $I-V$  特性は、次式 (1) で示され、パラメータ  $r_d$  は非線形抵抗の傾きである。

$$v_d(i_2) = \frac{r_d}{2} \left( \left| i_2 + \frac{V}{r_d} \right| - \left| i_2 - \frac{V}{r_d} \right| \right). \quad (1)$$

また、回路のダイナミクスは次のような区分線形三次の常微分方程式により記述される。

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} &= v + ri_1 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} &= v - v_d(i_2) \\ C \frac{dv}{dt} &= -i_1 - i_2. \end{aligned} \quad (2)$$

式 (2) 中の各変数を，以下のように置き換えることによって，

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{\frac{C}{L_1}} Vx; \quad i_2 = \frac{\sqrt{L_1 C}}{L_2} Vy; \quad v = Vz; \\ r\sqrt{\frac{C}{L_1}} &= \alpha; \quad \frac{L_1}{L_2} = \beta; \quad r_d \frac{\sqrt{L_1 C}}{L_2} = \delta; \\ t &= \sqrt{L_1 C} \tau; \quad " \cdot " = \frac{d}{d\tau} \end{aligned}$$

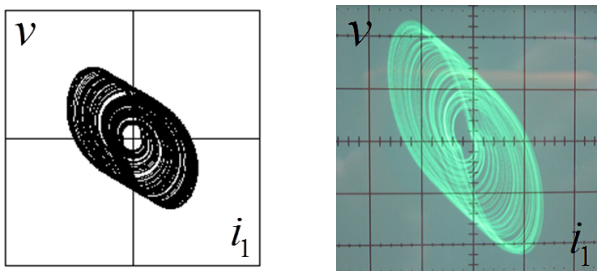
正規化された式 (3) を得ることができる．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x + z \\ \dot{y} &= z - f(y) \\ \dot{z} &= -x - \beta y \end{aligned} \quad (3)$$

ここで， $f(y)$  は以下の式で表される．

$$f(y) = \frac{\delta}{2} \left( \left| y + \frac{1}{\delta} \right| - \left| y - \frac{1}{\delta} \right| \right). \quad (4)$$

このカオス回路で観測されるカオスアトラクタを図2に示す．図2(a) がコンピュータシミュレーションによって得られた結果，図2(b) が回路実験によって得られた結果である．コンピュータシミュレーションおよび回路実験で用いたパラメータは以下のとおりである． $\alpha = 0.460$ ,  $\beta = 3.0$ ,  $\delta = 470$ .  $L_1 = 500[mH]$ ,  $L_2 = 200[mH]$ ,  $C = 0.015[\mu F]$ , and  $r_d = 1.46[M\Omega]$ .



(a) シミュレーション．

(b) 回路実験．

図 2: カオスアトラクタ．

次に，カオス回路を  $N$  個を抵抗で結合した場合のシステムについて考える．それぞれのカオス回路がその他のカオス回路と全て結合している完全結合の

場合，以下のような回路方程式で記述される．

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\tau} &= \alpha x_i + z_i \\ \frac{dy_i}{d\tau} &= z_i + f(y) \\ \frac{dz_i}{d\tau} &= -x_i - \beta y_i - \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} (z_i - z_j) \end{aligned} \quad (5)$$

( $i, j = 1, 2, \dots, N$ )

式 (5) 中のパラメータ  $\gamma_{ij}$  は， $i$  番目と  $j$  番目のカオス回路間の結合強度を表している．本研究においては， $\gamma_{ij}$  は  $i$  番目と  $j$  番目のカオス回路間の距離に応じて決定され，以下の式で記述される．

$$\gamma_{ij} = \frac{g}{(d_{ij})^2}. \quad (6)$$

ここで， $d_{ij}$  は  $i$  番目と  $j$  番目のカオス回路間のユークリッド距離を表している． $g$  は結合強度を決定するスケーリングパラメータである．このシミュレーションでは， $g = 1.0 \times 10^{-5}$  と設定した．

### 3 基本的な同期現象

まずはじめに，基本的な同期現象として，いくつかのカオス回路を 1 次元上に規則的に配置した場合のカオス回路間の位相差について調査を行う．このシミュレーションでは，全てのカオス回路は抵抗で完全結合されており，結合強度はカオス回路間の距離に依存して決定される．

図3は，5つのカオス回路を 1 次元上に配置した場合の回路システムを表したものである．カオス回路間の距離をそれぞれ  $d = 0.1$ ,  $d = 0.3$ ,  $d = 0.5$  と変化させたときの，位相差について調査を行う．

図4に，コンピュータシミュレーションによって得られた隣接するカオス回路間の位相アトラクタを示す．これらの結果から，隣接するカオス回路間の距離が  $d = 0.10$  の時は，同相同期になることがわかる．距離  $d$  が増加するに伴い，位相差も大きくなり， $d = 0.50$  の時には，非同期になることが確認できる．この位相アトラクタの 20,000 回の平均値を表1に示す．よって本研究のシミュレーションにおいて，隣接するカオス回路の最大距離は  $d = 0.10$  とする．

### 4 同期現象

この章では，いくつかのカオス回路を不規則なインターバルで配置したときの同期現象について考える．さらに，対称および非対称な配置方法を提案する．

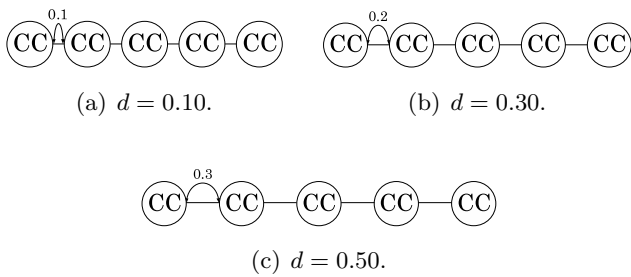


図 3: カオス回路の配置方法 (インターバル: 規則的) .

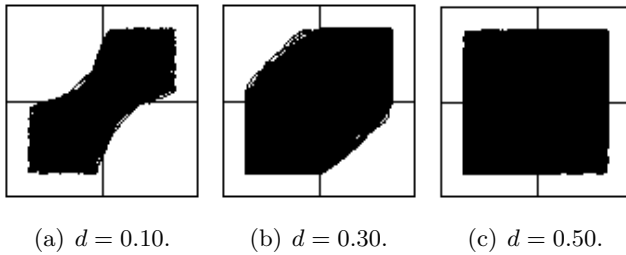


図 4: カオス回路間の位相差 . (a) 同相同期 . (b) 位相同期 . (c) 非同期 .

表 1: 隣接するカオス回路の位相差 .

回路システム	位相差 [deg.]
$d = 0.10$	$16.17^\circ$
$d = 0.30$	$57.19^\circ$
$d = 0.50$	$94.92^\circ$

#### 4.1 同期現象 I

ここでは、4つのカオス回路を不規則なインターバルで一次元上に配置した場合の同期現象について調査を行う。図 5 に、対称配置と非対称配置の二種類の配置方法を示す。図 5(a) は、2つのグループで構成されており、左側のグループには2つのカオス回路が配置され、右側のグループにも対称に2つのカオス回路が配置されている。グループ内のカオス回路の距離は、 $d = 0.01$  で、グループ間のカオス回路の距離は、 $d = 0.10$  と設定した。非対称配置として、右側のグループが1つのカオス回路で構成される回路システムを図 5(b) に示す。コンピュータシミュレーションによって、対称配置と非対称配置でどのように同期状態に違いがでるかを調査する。

図 6 に、対称配置の位相差のシミュレーション結果を示す。グループ内のカオス回路は同相同期になっ

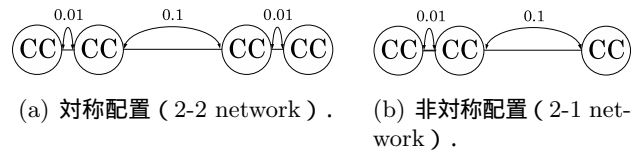


図 5: カオス回路の配置手法 .

ており、また同様にグループ間のカオス回路も同相同期になっていることがわかる。よって、この対称配置のシステムでは、すべてのカオス回路が同相で同期していることになる。次に、図 7 に非対称配置の位相差のシミュレーション結果を示す。グループ内のカオス回路は同相で同期しているが、グループ間のカオス回路が非同期になっている。この結果は非常に興味深いといえる。なぜなら、前章のシミュレーションで、隣接するカオス回路間が  $d = 0.10$  のときは、同相同期が観測されている。この非対称配置の回路システムにおいても、グループ間の距離は  $d = 0.10$  と設定しているため、グループ間のカオス回路も同期できる距離である。しかしながら、回路システムの構造が非対称になることでカオス同期の崩壊が観測されることが確認できた。これらの結果より、回路システムの対称性がカオス同期に重要な役割を果たすと考えられる。

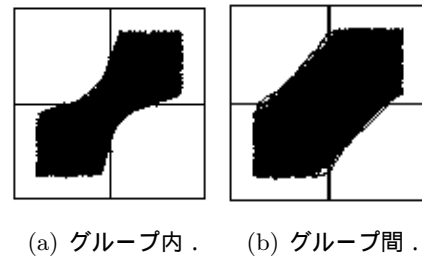


図 6: 対称配置の場合の位相差 .

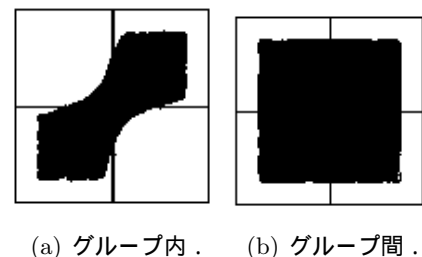


図 7: 非対称配置の場合の位相差 .

## 4.2 同期現象 II

次に，グループ内の最大カオス回路数を 3 にした場合の，回路システムについて調査を行う．図 8 に，不規則インターバルでカオス回路を配置した対称および非対称配置の回路システム (3-1, 3-2, 3-3 networks) を示す．この回路システムでも先ほどと同様に，グループ内のカオス回路の距離は， $d = 0.01$  で，グループ間のカオス回路の距離は， $d = 0.10$  と設定した．

それぞれの回路システムでのグループ間の位相差のシミュレーション結果を図 9 に示す．この結果より，対称配置の場合は，グループ間のカオス回路は同相同期するが (図 9(c))，回路システムの構造の非対称度が強くなるにつれて，同相同期がある位相差を持った同期に変化し (図 9(b))，最後には非同期となるのが分かった (図 9(a))．

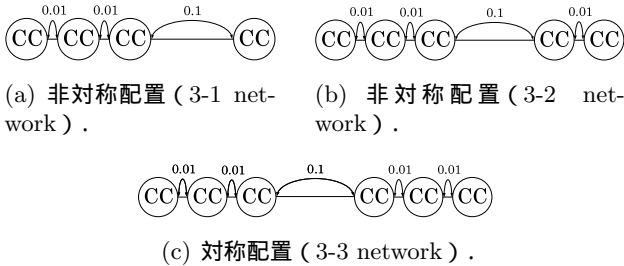


図 8: カオス回路の配置手法 .



(a) 非対称配置 (3-1 network) . (b) 非対称配置 (3-2 network) . (c) 対称配置 (3-3 network) .

図 9: グループ間のカオス回路の位相差 .

## 4.3 同期現象 III

ここでは，グループ内の最大カオス回路数をさらに 4, 5 にした場合の，回路システムについて調査を行う．図 10, 11 に，グループ間の位相差のシミュレーション結果を示す．これらの結果より，先ほどと同様に，対称配置の場合は，グループ間のカオス回路は同相同期するが，回路システムの構造の非対称度が強くなるにつれて，同相同期がある位相差を持っ

た同期に変化し，最終的には非同期となるのが分かった．

最後に，これまでに用いた回路システムおよび片方のグループ内のカオス回路数を 10 個にした場合の，グループ間の位相差の結果を図 12 にまとめた．図中の  $N_s$  は片方のグループのカオス回路数を，横軸の  $Ratio$  は，右側と左側のグループのカオス回路の比を表している．このグラフより，回路システムが対称配置の場合，グループ間のカオス回路は同相同期し，対称性が崩れるにつれて，非同期へと遷移していく様子が見える．また，非同期への切り替わりはカオス回路数によって異なることも確認できる．

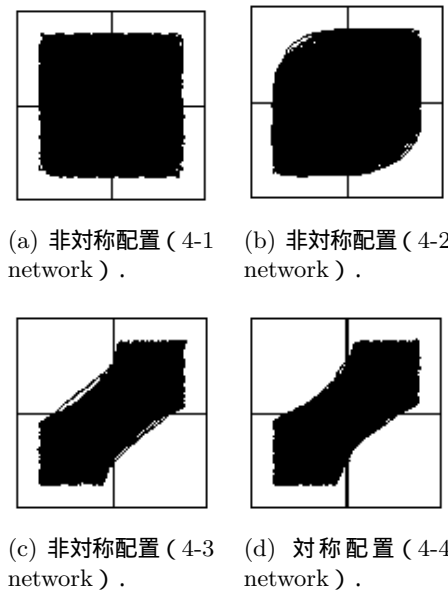


図 10: グループ間のカオス回路の位相差 .

## 5 まとめ

本研究では，カオス回路を一次元上に配置したときの同期現象について調査を行った．まず，カオス回路を規則的に配置したシステムで基本的な同期現象を確認した．続いて，カオス回路を不規則的に配置したシステムを考えた．さらに不規則的に配置した回路システムには，対称配置と非対称配置の二種類の配置方法について調査した．コンピュータシミュレーションの結果，不規則的に配置した回路システムにおいて興味深い同期現象を確認することができた．すなわち，回路配置が対称か非対称かによって，得られる同期現象が異なることがわかった．

今後の課題として，提案した回路システムを大規模化ネットワークに応用することがあげられる．

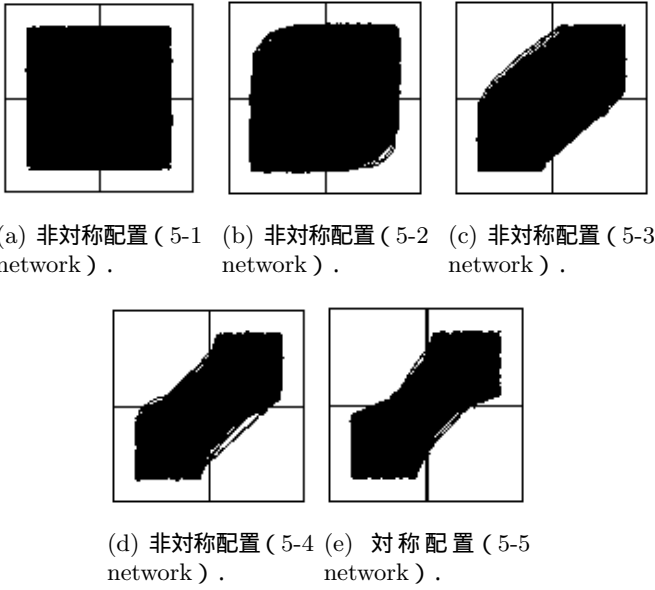


図 11: グループ間のカオス回路の位相差 .

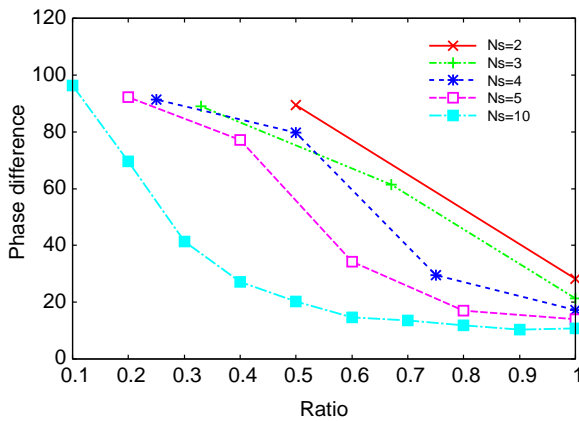


図 12: 位相差の結果 .

## 謝辞

This work was partly supported by JSPS Grant-in-Aid for Young Scientists 23700269.

## 参考文献

- [1] L.L. Bonilla, C.J. Perez Vicente and R. Spigler, "Time-periodic phases in populations of nonlinearly coupled oscillators with bimodal frequency distributions," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 113, no. 1, pp. 79-97, Feb. 1998.
- [2] J.A. Sherratt, "Invading wave fronts and their oscillatory wakes are linked by a modulated traveling phase resetting wave," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 117, no. 1-4, pp. 145-166, Jul. 1998.

- [3] G. Abramson, V.M. Kenkre and A.R. Bishop, "Analytic solutions for nonlinear waves in coupled reacting systems," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 305, no. 3-4, pp. 427-436, Mar. 2002.
- [4] I. Belykh, M. Hasler, M. Lauret and H. Nijmeijer, "Synchronization and graph topology," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 15, no. 11, pp. 3423-3433, Nov. 2005.
- [5] C.M. Gray, "Synchronous oscillations in neural systems: mechanisms and functions," *J. Computational Neuroscience*, vol. 1, pp. 11-38, 1994.
- [6] Y. Takamaru, H. Kataoka, Y. Uwate and Y. Nishio, "Clustering phenomena in complex networks of chaotic circuits", *Proc. of ISCAS'12*, pp. 914-917, Mar. 2012.
- [7] Y. Takamaru, Y. Uwate, T. Ott and Y. Nishio, "Clustering phenomena of coupled chaotic circuits for large scale networks", *Proc. of NDES'12*, pp. 70-73, Jul. 2012.
- [8] Y. Nishio, N. Inaba, S. Mori and T. Saito, "Rigorous analyses of windows in a symmetric circuit," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 37, no. 4, pp. 473-487, Apr. 1990.
- [9] C. Bonatto and J. A. C. Gallas, "Periodicity hub and nested spirals in the phase diagram of a simple resistive circuit," *Phys. Rev. Lett.*, 101, 054101, Aug. 2008.
- [10] R. Stoop, P. Benner and Y Uwate, "Real-world existence and origins of the spiral organization of shrimp-shaped domains," *Phys. Rev. Lett.*, 105, 074102, Aug. 2010.