

## 二つの四面体構造を面で共有する結合発振器の同期現象に関する調査

永井 隆博<sup>†</sup> 糸野 紘範<sup>†</sup> 上手 洋子<sup>†</sup> 西尾 芳文<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 徳島大学工学部 〒770-8506 徳島県徳島市南常三島町 2-1  
E-mail: †{nagataka,kumeno,uwate,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

**あらまし** 本研究では二つの四面体構造をした結合発振器をお互いの面同士で結合したモデルを提案し、その同期現象について調査を行う。我々は隣接した発振期間の結合強度に着目し、発振器全体の結合強度を変えた場合の位相差の推移を示す。次に結合強度を部分的に変化させ、強弱をつけた場合の同期状態を観測する。

**キーワード** 同期現象, 結合発振器, 四面体

Takahiro NAGAI<sup>†</sup>, Hironori KUMENO<sup>†</sup>, Yoko UWATE<sup>†</sup>, and Yoshifumi NISHIO<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Tokushima University,  
2-1 Minamijosanjima, Tokushima, 770-8506 Japan  
E-mail: †{nagataka,kumeno,uwate,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

**Abstract** In this study, we investigate the synchronization phenomena observed in two coupled tetrahedral oscillators shared triangular face. We focus on the coupling strength between adjacent oscillators and we show the change of the phase differences when we change the coupling strength. Next, we vary the coupling strength partially and observe synchronization states of shared triangular oscillators.

**Key words** Synchronization, Coupled Oscillator, Tetrahedron Form

### 1. ま え が き

自然界において同期現象は多く存在する。ホタルの発光や振り子の振幅、心臓の拍動、人の拍手などがその例として挙げられる。結合発振システムは自然界で高次元の現象を示すのに最も適したモデルであり、そのため結合発振器を用いた同期現象の研究は工学だけでなく数学、物理学、生物学などでも盛んに行われている [1]-[7]。結合発振器の同期現象では、複雑な波形模様を生み出すため興味深い位相パターンを多く含んでいる。そのため今までに多くの結合発振器モデルが提案され、非線形

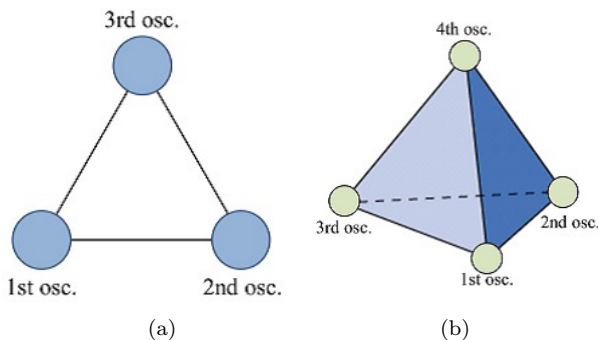


図1 結合 van der Pol 発振器. (a) 三角形構造の結合発振器. (b) 四面体構造の結合発振器.

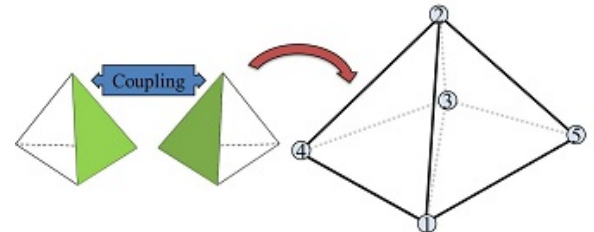


図2 本研究の回路モデルの概略図.

現象のメカニズムの一部が解明されてきた。しかしながら複雑に結合された発振ネットワークでの同期現象の解析は不十分であると考えられる。

今までの研究で我々はいくつかの van der Pol 発振器を用いた結合発振器の回路モデルを提案してきた。van der Pol 発振器は回路構造が単純であるため、様々な形で結合されその時に観測される同期現象について研究されてきた [8], [9]。特に、図1に示されたようなリング状に結合された三つの van der Pol 発振器に関する研究では、非常に興味深い現象が確認されている [10]。この回路モデルではそれぞれの発振器間をインダクタによって結合され、抵抗を介して接地されている。このモデルでは発振器の数が奇数なため、同相同期や逆相同期の同期現象は観測することができない。つまり発振器間の同期現象は安定状態なため、フラストレーションの影響によって常に三相同

期が観測することができる。

以前の我々の研究では、より強いフラストレーションが発生する結合発振器でいくつかの興味深い同期現象を観測することができた。我々は図1(b)に示された四面体構造をした結合発振器を提案し、その同期現象について研究を行った。シミュレーションを行った結果、我々は近接した発振期間の位相差が周期的に変化し、近接した発振器が逆相に同期した後、その同期が崩れると言った特徴を発見することができた。つまり、この発振器モデルでは逆相同期と非同期がスイッチングし、繰り返されていると言った特徴があると言える。また、別の研究では二つの三角形の結合発振器の一边を共有して結合した結合発振器モデルが提案されている [11]。この研究では共有された一边の発振器間の同期現象は同相となり、その他の発振器間の同期現象は逆相となる。

本研究で我々は、図2に示されるような二つの四面体構造をしたモデルを面で結合した場合の結合発振器を提案する。このモデルでは四つ目と五つ目の発振器間のみ結合せず、その他の発振器間はインダクタで結合され抵抗で接地されている。我々はこのモデルをシミュレーションを用いて位相差の測定を行い、同期現象を調査する。そのとき発振器間の結合強度に着目し、結合の強さに強弱をつけることで同期状態の変化について調べる。

## 2. 回路モデル

本研究の回路モデルを図3(a)に、発振器間の結合方法を図3(b)に示す。それぞれの発振器の電圧とインダクタに流れる電流を図に示すとおり定義する。それぞれの発振器は各インダクタが近接した発振器と結合するために枝分かれしており、そのインダクタと負性抵抗とキャパシタは並列で結合されている。回路シミュレーションでは負性抵抗の電圧電流特性を式(1)で示されるような三次の多項方程式を与え、それによって発振器の非線形性を表現している。

$$i_{Rk} = -g_1 v_k + g_3 v_k^3 \quad (g_1, g_3 > 0), \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

正規化した後の回路方程式を以下のようにする。

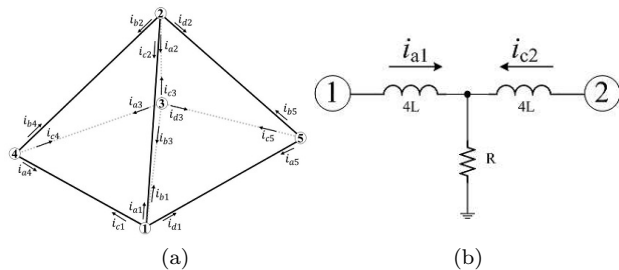


図3 本研究の回路モデル。(a) 概略図。(b) 近接した発振器間の結合構造。

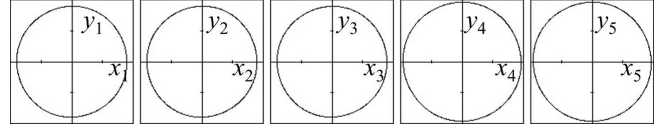


図4 各発振器のアトラクター (横軸:  $x_k$ , 縦軸:  $y_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ )).

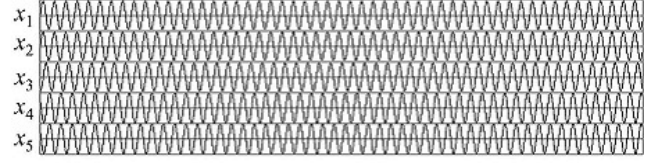


図5 各発振器の時間波形。

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{d\tau} = \varepsilon(1 - \frac{1}{3}x_k^2)x_k - (y_{ak} + y_{bk} + y_{ck} + y_{dk}) \\ \frac{dy_{ak}}{d\tau} = \frac{1}{4}\{x_k - \eta y_{ak} - \gamma(y_{ak} + y_n)\} \\ \frac{dy_{bk}}{d\tau} = \frac{1}{4}\{x_k - \eta y_{bk} - \gamma(y_{bk} + y_n)\} \\ \frac{dy_{ck}}{d\tau} = \frac{1}{4}\{x_k - \eta y_{ck} - \gamma(y_{ck} + y_n)\} \\ \frac{dy_{dk}}{d\tau} = \frac{1}{4}\{x_k - \eta y_{dk} - \gamma(y_{dk} + y_n)\}. \end{cases} \quad (2)$$

ここで変数変換とパラメータを下式に示す。

$$t = \sqrt{LC}\tau, v_k = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}} x_k, i_{ak} = \sqrt{\frac{g_1 C}{3g_3 L}} y_{ak},$$

$$i_{bk} = \sqrt{\frac{g_1 C}{3g_3 L}} y_{bk}, i_{ck} = \sqrt{\frac{g_1 C}{3g_3 L}} y_{ck},$$

$$\varepsilon = g_1 \sqrt{\frac{L}{C}}, \gamma = R \sqrt{\frac{C}{L}}, \eta = r_m \sqrt{\frac{C}{L}},$$

$$(k=1, 2, 3, 4, 5),$$

この回路方程式において、 $\varepsilon$ は発振器の非線形性、 $\gamma$ は結合強度、 $\eta$ は抵抗成分を示すパラメータである。また、 $y_n$ は結合抵抗Rに流れる近接した発振器の電流を示している。四つ目と五つ目の発振器間は抵抗を介さずに接地するため、 $\gamma=0.0$ となる。この回路方程式を用いて近接した発振器間の位相差について調査を行う。

## 3. 同期現象

我々は四次のルンゲ・クッタ法を用いて方程式(2)を解く。

図4にそれぞれの発振器のアトラクターを示している。図の横軸はそれぞれの発振器の電圧、縦軸は電流を示している。電流は枝分かれした合計 ( $y_k = y_{ak} + y_{bk} + y_{ck} + y_{dk}$ ) とし、その時のパラメータは  $\varepsilon = 0.10$ ,  $\gamma = 0.10$  and  $\eta = 0.00010$  とする。次に、各発振器のキャパシタの電圧の時間波形を図5に示し、その時の近接した発振器間の位相差を図6に示す。結果と

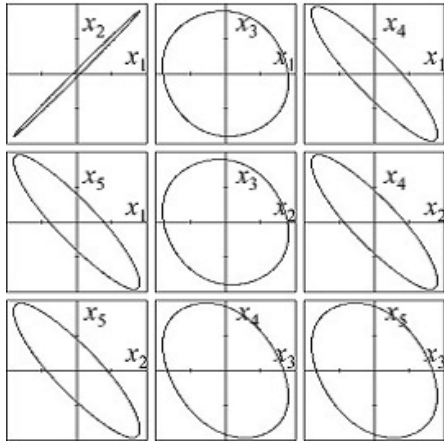


図 6 近接した発振器間のリサージュ図形.

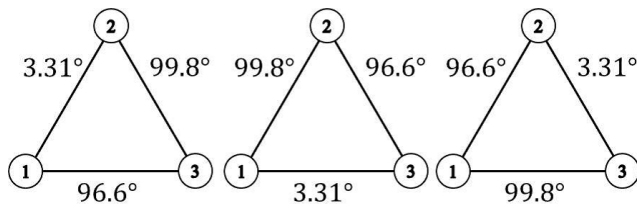
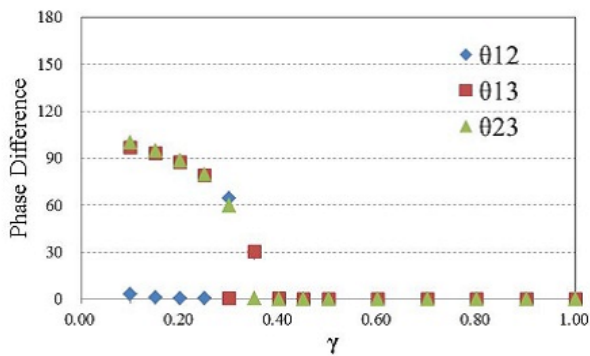
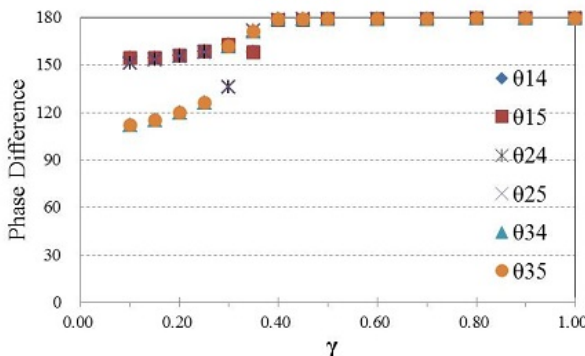


図 7 初期値による位相差の差異.

してこの回路モデルの場合、位相差は変化せずに最終的に一定の値で収束することがわかった。図 6 より、共有した三つの発



(a)



(b)

図 8 結合強度の影響による発振器間の位相差. (a) 共有した三つの発振器間の位相差. (b) その他の発振器間の位相差.

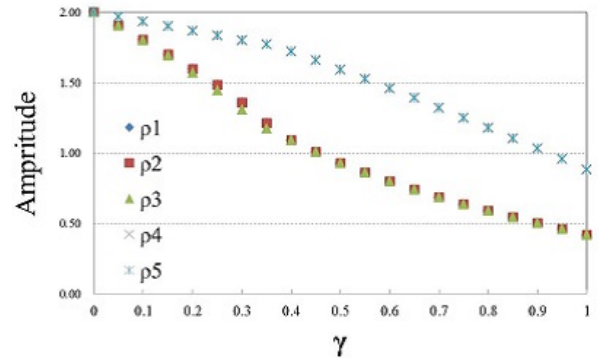


図 9 電圧の振幅の推移.

振器間の位相差では三角形の一边が同相に同期し、他の二辺では異なる位相を含んでいくことがわかる。ここで初期値の依存性について調査を行った結果、初期値によって位相差が変化することは無かったが、共有した三つの発振器間において位相差の組み合わせが変化した。つまり、図 7 に示すような三つの場合について確認することができた。初期値の調査では様々な値をそれぞれの発振器に適応し、値を発振器間でローテーションすることで、同様の結合をしている発振器に同じ初期値を入れた場合同様の同期現象が確認できるか観測した。

次に結合強度  $\gamma$  を 0.10 から 1.00 まで変化させた時の位相差の推移について調査を行った。このとき、位相差は二つのグループに分かれ、同相同期と逆相同期に収束した。共有した三つの発振器間の位相差は、結合強度を強くするに連れて同相状態に推移し、 $\gamma$  が 0.40 を超えると、三つの発振器は全て同相同期する。またそれ以外の発振器間では、逆相状態へ推移する。以上の位相差の推移は図 8 にまとめた。図 8(a) では共有した三つの発振器間の位相差について示しており、図 8(b) ではそれ以外の発振器間の位相差を示している。

また、図 9 には結合強度を変化させた時の各発振器の位相差についてまとめた。振幅の場合も二つのグループに分けられ、共有した三つの発振器はその他の二つの発振器と比べ、振幅の上がり幅が大きいことがわかる。

#### 4. 結合強度の依存性

本システムでは共有した三つの発振器間以外の結合を 0 とすると、単なる三角形のリング結合となる。つまりその時の三つの発振器の位相差は  $120^\circ$  となり、それ以外の発振器間の同期状態は非同期となる。その状態から結合の強さを  $\gamma = 0.100$  と固定し、共有した三つの発振器間以外の結合を  $\beta$  倍 ( $0 < \beta < 1.0$ ) し、各発振器の同期状態の変化を観測する。表 1 に  $\beta$  と同期状態の関係性についてまとめている。 $\beta$  が 0.450 より小さい

表 1  $\beta$  を変化させた時の同期状態の推移.

$\beta$	同期状態
0.000 ~ 0.450	非同期
0.450 ~ 0.500	逆相同期と非同期
0.500 ~ 0.536	同相同期と非同期
0.536 ~ 1.000	一定の位相で同期

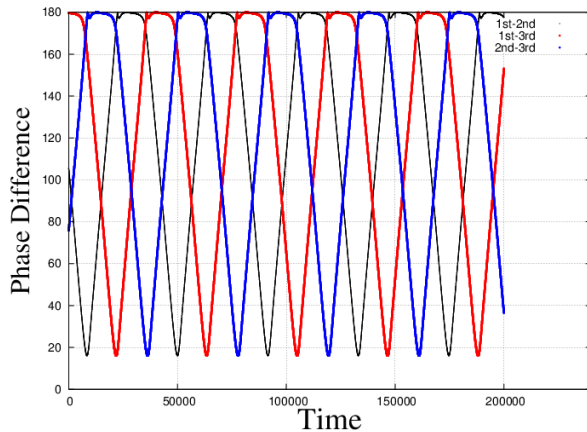


図 10 共有した三つの発振器間の位相差.

時, 共有した発振器間の位相差は  $120^\circ$  を中心に周期的に変化する. このとき,  $\beta$  が大きいほど位相差の変化の幅が大きくなり,  $\beta$  が  $0.450$  を超えると, 逆相状態に一時的に滞在し非同期へ移行する.

図 10 に  $\beta=0.480$  のときの共有した三つの発振器間の位相差を示す. それぞれの発振器間の同期状態は全て逆相同期と非同期の二種類がスイッチングしつつも, 周期は一定の間隔を維持している. 逆相状態の滞在時間は  $\beta$  の大きさに依存しており,  $\beta$  が大きいほど長くなる傾向がある.

また  $\beta$  が大きくなると同相状態にも近づいており,  $\beta=0.500$  に達すると同相状態が維持されるようになる.  $\beta$  が  $0.530$  を超えると, 逆相状態よりも同相状態を維持するようになり, 逆相状態から遠のき, 位相差  $160^\circ$  で一時的に滞在する.  $\beta$  が  $0.535$  を超えると, 同相状態で滞りつつ逆相状態では非常に複雑な位相差の変化が現れる. 図 11 は  $\beta$  の値を変化させた時の一周の長さと同相・逆相状態の滞在時間を示している. この結果は十分に長い周期の観測から平均を算出しており, 長時間経過しても周期の長さに変化はなかった. この図より, 一周の長さは  $\beta$  の大きさに依存していることがわかり, 逆相状態の滞在時間も同様であるといえる. 同相と逆相状態の領域はそれぞれ,  $0^\circ$  から  $10^\circ$ ,  $170^\circ$  から  $180^\circ$  と定義している. そのため,  $\beta$  が  $0.530$  付近では定義した逆相状態の領域の外で一時的に滞在するため, その時の逆相状態の滞在時間を正確に求めることはで

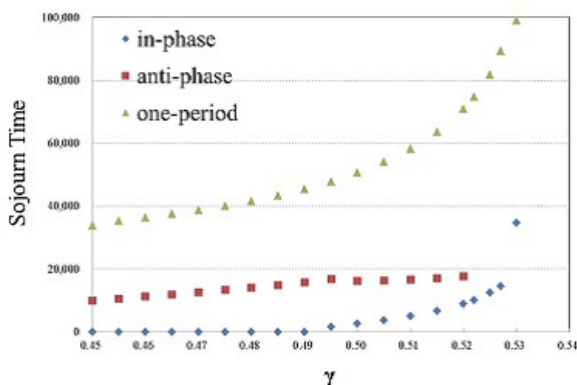


図 11  $\beta$  を変化させた場合の滞在時間の推移.

きなかった.

$\beta$  が  $0.536$  を超える値を取ると, 全ての発振器間の位相差は一定の値に収束し,  $\beta$  によって位相差は変化するものの定性的な変化はしなくなる.

## 5. 結 論

本研究では二つの四面体構造モデルを面で結合した場合の結合発振器の同期現象について調査を行った. 今回使用した回路モデルでは結合強度の強弱に着目した結果, 結合強度の強さに差をつけることで, 同期状態が変化するとした特徴を発見することができた. 加えて, 同期状態にも大きく三つのパターンに分けることができ, 四面体構造の結合発振器で観測されたような逆相同期と非同期のスイッチング現象を観測することができた. 今後は理論的な解析を加え, 振幅や位相を算出することでシミュレーション結果との比較を行いたい.

## 文 献

- [1] L.L. Bonilla, C.J. Perez Vicente and R. Spigler, "Time-periodic phases in populations of nonlinearly coupled oscillators with bimodal frequency distributions," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol.113, no.1, pp.79-97, Feb. 1998.
- [2] J.A. Sherratt, "Invading wave fronts and their oscillatory wakes are linked by a modulated traveling phase resetting wave," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol.117, no.1-4, pp.145-166, June 1998.
- [3] G. Abramson, V.M. Kenkre and A.R. Bishop, "Analytic solutions for nonlinear waves in coupled reacting systems," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol.305, no.3-4, pp.427-436, Mar. 2002.
- [4] 4. Belykh, M. Hasler, M. Lauret and H. Nijmeijer, "Synchronization and graph topology," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.15, no.11, pp.3423-3433, Nov. 2005.
- [5] C.M. Gray, "Synchronous oscillations in neural systems: mechanisms and functions," *J. Computational Neuroscience*, vol.1, pp.11-38, 1994.
- [6] J. Cosp, J. Madrenas, E. Alarcon, E. Vidal and G. Villar, "Synchronization of nonlinear electronic oscillators for neural computation," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol.15, no.5, pp.1315-1327, Sep. 2004.
- [7] R. Stoop and C. Wagner, "Neocortex's architecture optimizes computation, information transfer and synchronizability, at given total connection length," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.17, no.7, pp.2257-2279, 2007.
- [8] T. Suezaki and S. Mori, "Mutual synchronization of two oscillators," *Trans. IECE*, vol.48, no.9, pp.1551-1557, Sep. 1965.
- [9] T. Endo and S. Mori, "Mode analysis of a multimode ladder oscillator," *IEEE trans. Circuit Syst.*, vol.23, pp.100-113, Feb. 1976.
- [10] Y. Uwate, Y. Nishio and R. Stoop, "Synchronization in three coupled van der Pol oscillators with different coupling strength," *Proc. of NCSP'10*, pp.109-112, Mar. 2010.
- [11] Y. Uwate, Y. Nishio and R. Stoop, "Synchronization in two polygonal oscillatory networks sharing a branch," *NDES 2010*, pp.62-65, May. 2010.