第24回 回路とシステムワークショップ
The 24th Workshop on Circuits and Systems
in Awaji, August 1-2, 2011

大規模多角形発振器ネットワークで観測される同期現象とフラストレーションに関する研究

Synchronization and Frustration in Coupled Large-scale Polygonal Oscillatory Networks

上 手 洋 子† 西 尾 芳 文†
†徳島大学 工学部 電気電子工学科

Yoko UWATE† Yoshifumi NISHIO†
†Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Tokushima University

1 はじめに

同期は二つ以上の振動体が影響を受けることで，ある一定のリズムに落ち着く現象であり，蛍の発光現象や，心臓細胞の律動など自然界の様々な分野で観測される．同期の調査は，そのメカニズム解明だけではなく，より高度なアプリケーション開発が期待されるため，物理学，生物学，神経科学，工学，経済学など様々な分野で活発に研究が行われている [1]-[7]．同期現象の数理モデルとしては，蔵本によって提案された蔵本モデルが有名であるが，発振器やカオス回路など電気回路を用いたモデルも多数提案されている．遠藤らは，van der Pol 発振器を梯子状，環状，二次元配列状に結合したシステムの理論解析と回路実験結果を報告している [8]-[10]．

また，自然界にはハニカム構造や結晶構造など様々なタイプのネットワーク構造が存在する．しかし，発振器の大規模結合系の研究としては，環状や二次元格子状のモデルが多く，多角形が結合されたネットワークトポロジーについての研究はこれまであまり報告されていない．我々は，発振器をより複雑なネットワーク構造に応用することで，それぞれのネットワーク構造が持つ新しい特徴を見出すことができるのではないかと考える．さらに，結合発振器システムに何らかのジレンマやフラストレーションが与えられたときの同期現象は非常に興味深く，発振器システムの大規模化や複雑系ネットワークの観点から研究を行う場合に，より実際のシステムと対応がつくといえる．

これまでの研究で，我々は二つの多角形ネットワークの一辺を介して結合したシステムで観測される同期現象についての調査を行ってきた．ここでは，一つの多角形ネットワークを構成する発振器は奇数個とした。なぜなら，参考文献 [11],[12] のような結合の場合，奇数個の多角形ネットワークには，構造のフラストレーションが生じることで，同相や逆相といった安定な解が観測されずに，隣接する発振器の位相が $2\pi/N$ (N: 結合する発振器の数) ずつずれた N 相同期が観測されるからである．フラストレーションをそれぞれ持つ二つの多角形ネットワークを結合させることで，より強い構造のフラストレーションが回路システムに与えられると考えられる．対称なシステムとして，同じ発振器数の多角形ネットワークを結合させた場合，非対称なシステムとして，異なる発振器数の多角形ネットワークを結合させた場合の同期現象について調査を行った．隣接する発振器間の位相差に着目し，理論的に位相差を求める手法を提案した [12]．また，発振器はシステム全体の消費エネルギーを最小にするように同期することを明らかにした．しかし，これまでの研究では，フラストレーションが発振器にどのように影響しているかの詳細な調査は行っていなかった．

そこで，本研究では，フラストレーションの度合いを表す指標として，発振器の振幅の変化に注目する．また，フラストレーションの影響を理解するために三角形ネットワークと偶数個の多角形ネットワークを一辺を介して結合した場合の同期現象について調査を行う．さらに大規模化のケースを考え，偶数個の多角形ネットワークの発振器数を 4 から 100 まで変化させたときの位相差およびフラストレーションについて調査を行う．

2　三角形ネットワークと偶数個の多角形ネットワークの結合系

図 1 に三角形型発振器ネットワークと偶数個の多角形ネットワークを一辺を介して結合した回路モデルの概略図を示す．本回路モデルにおいて，N_e は偶数個の多角形ネットワークに結合される発振器の個数を表す．一例として，偶数個の多角形ネットワークが四角形ネットワークの場合の回路図を図 2 に示す．発振器モデルとして，van der Pol 発振器を用いる．隣接する発振器の結合方法は，発振器のコイルを介して接地された抵抗につなぐものとする．

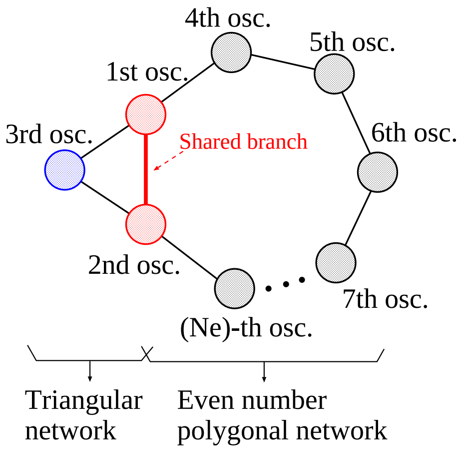


図 1: 三角形ネットワークと偶数個の多角形ネットワークの結合回路 ($N_e = 4, 6, 8, ...100$).

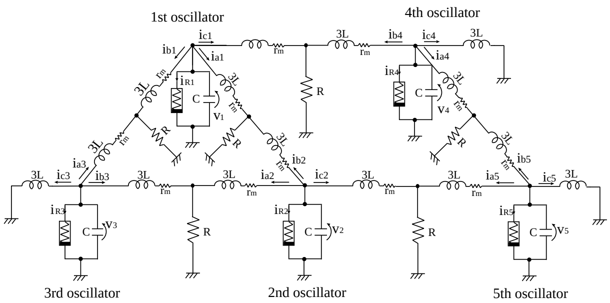


図 2: 発振器の結合方法 (例: 三角形ネットワークと四角形ネットワークの結合回路).

この回路において非線形抵抗の $v_k - i_{Rk}$ 特性は式 (1) に示すような 3 次特性の多項式で近似される．

$$i_{Rk} = -g_1 v_k + g_3 {v_k}^3 \quad (g_1, g_3 > 0), \tag{1}$$

$$(k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

正規化後の回路方程式は次のようになる．

[First oscillator]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon\Big(1 - \dfrac{1}{3}{x_1}^2\Big)x_1 - (y_{a1} + y_{b1} + y_{c1}) \\ \dfrac{dy_{a1}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_1 - \eta y_{a1} - \gamma(y_{a1} + y_{b2})\Big\} \\ \dfrac{dy_{b1}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_1 - \eta y_{b1} - \gamma(y_{a3} + y_{b1})\Big\} \\ \dfrac{dy_{c1}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_1 - \eta y_{c1} - \gamma(y_{b3} + y_{c1})\Big\} \end{cases} \tag{2}$$

[Second oscillator]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2}{d\tau} = \varepsilon\Big(1 - \dfrac{1}{3}{x_2}^2\Big)x_2 - (y_{a2} + y_{b2} + y_{c2}) \\ \dfrac{dy_{a2}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_2 - \eta y_{a2} - \gamma(y_{a2} + y_{b3})\Big\} \\ \dfrac{dy_{b2}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_2 - \eta y_{b2} - \gamma(y_{a1} + y_{b2})\Big\} \\ \dfrac{dy_{c2}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_2 - \eta y_{c2} - \gamma(y_{a5} + y_{c2})\Big\} \end{cases} \tag{3}$$

[Third oscillator]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_3}{d\tau} = \varepsilon\Big(1 - \dfrac{1}{3}{x_3}^2\Big)x_3 - (y_{a3} + y_{b3} + y_{c3}) \\ \dfrac{dy_{a3}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_3 - \eta y_{a3} - \gamma(y_{a3} + y_{b1})\Big\} \\ \dfrac{dy_{b3}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_3 - \eta y_{b3} - \gamma(y_{a2} + y_{b3})\Big\} \\ \dfrac{dy_{c3}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_3 - \eta y_{c3}\Big\} \end{cases} \tag{4}$$

[Fourth oscillator]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_4}{d\tau} = \varepsilon\Big(1 - \dfrac{1}{3}{x_4}^2\Big)x_4 - (y_{a4} + y_{b4} + y_{c4}) \\ \dfrac{dy_{a4}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_4 - \eta y_{a4} - \gamma(y_{a4} + y_{b5})\Big\} \\ \dfrac{dy_{b4}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_4 - \eta y_{b4} - \gamma(y_{b4} + y_{c1})\Big\} \\ \dfrac{dy_{c4}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_4 - \eta y_{c4}\Big\} \end{cases} \tag{5}$$

[Fifth oscillator]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_5}{d\tau} = \varepsilon\Big(1 - \dfrac{1}{3}{x_5}^2\Big)x_5 - (y_{a5} + y_{b5} + y_{c5}) \\ \dfrac{dy_{a5}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_5 - \eta y_{a5} - \gamma(y_{a5} + y_{c2})\Big\} \\ \dfrac{dy_{b5}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_5 - \eta y_{b5} - \gamma(y_{a4} + y_{b5})\Big\} \\ \dfrac{dy_{c5}}{d\tau} = \dfrac{1}{3}\Big\{x_5 - \eta y_{c5}\Big\} \end{cases} \tag{6}$$

ここで，変数変換とパラメータは下式に示す．

$$t = \sqrt{LC}\tau, \quad v_k = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}}x_k,$$

$$i_{ak} = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}}\sqrt{\frac{C}{L}}y_{ak}, \quad i_{bk} = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}}\sqrt{\frac{C}{L}}y_{bk},$$

$$\varepsilon = g_1\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = R\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \eta = r_m\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

この回路方程式において，γ は結合係数，ε は発振器の非線形性を表すパラメータである．偶数個の多角形ネットワークの発振器数が増えた場合も，同様に回路方程式を導出することができる．シミュレーションによる調査では，式 (2) を 4 次のルンゲ=クッタ法（ステップサイズ: $h = 0.005$）で解く．また各パラメータは，$\varepsilon = 0.1$，$\gamma = 0.1$，$\eta = 0.001$ のように設定した．

2.1　同期現象

図 3 に偶数個の多角形ネットワークの発振器数を 4 から 100 に増やしたときの，各発振器間の位相差の変化を示す．図 1 の回路モデルにおいては，次のように位相差が三種類に区別される．

- 共有発振器（一番と二番目）間の位相差
- 三角形型ネットワークの発振器間の位相差
- 偶数個の多角形ネットワークの発振器間の位相差

共有発振器間の位相差は，偶数個の多角形ネットワークの発振器数が小さいとき ($N_e = 4$) は $140°$ 付近を示しているが，発振器の増加とともに減少し，$N_e = 50$ になると $122°$ に収束している様子がわかる．三角形型ネットワークの位相差は，$N_e = 4$ のときは $110°$ 付近を示し，発振器の増加とともに増加し，$N_e = 50$ のところで $120°$ に収束している．最後に，偶数ネットワークの発振器間の位相差は，$N_e = 50$ 以降は $180°$ に収束している．これらの結果から，システムの大規模化に伴い三角形型の発振器ネットワークは三相同期に近づき，偶数個の多角形ネットワークの発振器は逆相同期に限りなく近づくことがわかった．

2.2　フラストレーション

次に，結合発振器のフラストレーションについて調査を行う．式 (2)-(6) の γ がゼロ，すなわち発振器間の結合がない場合，各々の発振器の振幅は 2.0 である．しかし，結合発振器ネットワークに何らかのフラストレーションが与えられると，発振器の振幅が変化する．我々は，発振器の振幅の変化をフラストレーションとして扱い調査を行う．フラストレーション (F) は以下の式に示されるように発振器の振幅の減少率よって定義される．

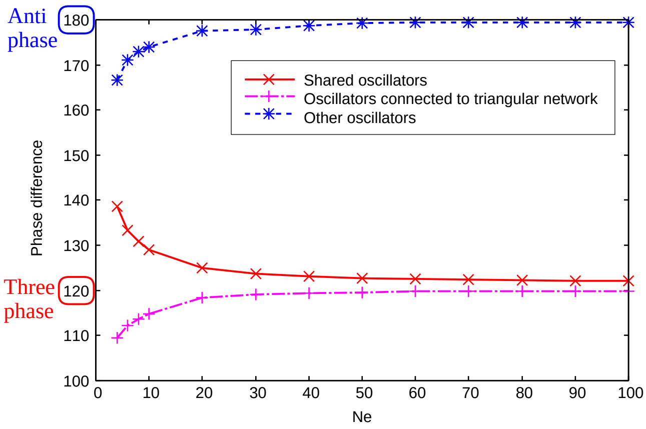


図 3: 各発振器の位相差の変化.

$$F = \frac{2.0 - A_k}{2.0} \times 100[\%], \tag{7}$$

ここで，A_k は k 番目の発振器の振幅を示す．

図 4 に偶数個の発振器ネットワークの発振器数を増加させた場合の，フラストレーションの結果を示す．前節での位相差と同様に，フラストレーションも次の三種類に分類される．

- 共有発振器（一番と二番目）のフラストレーション
- 三番目の発振器のフラストレーション
- 偶数個の多角形ネットワークのフラストレーション

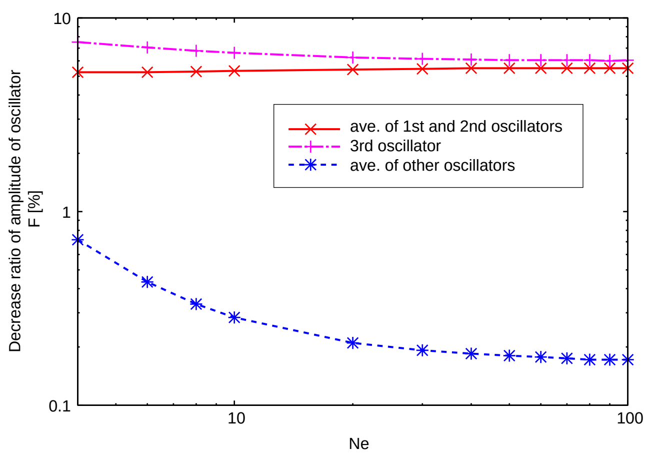


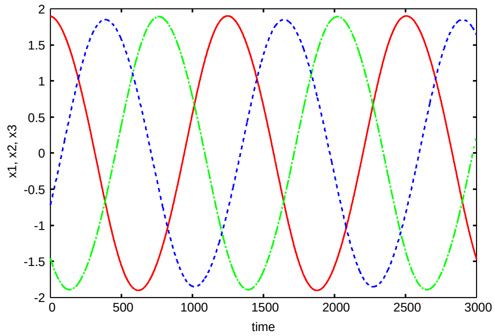
図 4: フラストレーションの結果.

このグラフより，図 1 のシステムにおいて最もフラストレーションが高いのは三番目の発振器であることがわかる．続いて，共有発振器のフラストレー

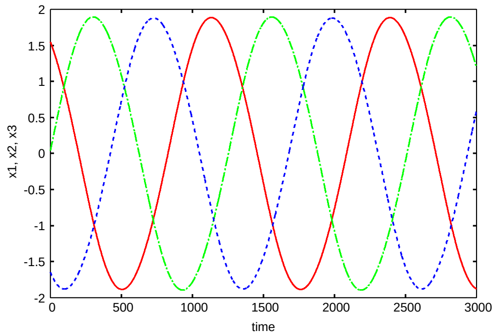
ションが高く，偶数個の発振器ネットワークに結合されている発振器のフラストレーションは他のと比べて低いことがいえる．また，共有発振器および三番目の発振器は，システムの増加に伴いフラストレーションの値はそれほど変化せずに 6 付近に収束するのに対して，偶数個の多角形ネットワークのフラストレーションは変化率が大きく，最終的には 0.2 と非常に小さい値になっていることがグラフから読み取れる．

これらの結果より，偶数個の多角形ネットワークの発振器の増加に伴い，システム全体のフラストレーションが小さくなっているのがわかる．

最後に，偶数個の多角形ネットワークの発振器数が $N_e = 4, 100$ のときの，三角形型発振器ネットワークのキャパシタ電圧 (x_1, x_2, x_3) の時間波形を図 5 に示す．この図より，偶数個の多角形ネットワークの発振器数が多くなるにつれて，三角形型のネットワークが三相同期に近づいていることがわかる．



(a) $N_e = 4$.



(b) $N_e = 100$.

図 5: 三角形型ネットワークの時間波形.

3　まとめと今後の課題

本研究では，三角形型の発振器ネットワークに大規模な偶数個の多角形発振器ネットワークを一辺を介して結合したシステムで観測される同期現象についての調査をコンピュータシミュレーションによって行った．位相差およびフラストレーションに着目し，システムの規模がある程度以上大きくなると位相差もフラストレーションも変化しないことがわかった．

フラストレーションを考慮した場合の，理論的解析による位相差の導出および van der Pol 発振器をカオス回路にした場合の調査が今後の課題である．

参考文献

[1] L.L. Bonilla, C.J. Perez Vicente and R. Spigler, "Time-periodic phases in populations of nonlinearly coupled oscillators with bimodal frequency distributions," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol.113, no.1, pp.79-97, Feb. 1998.

[2] G. Abramson, V.M. Kenkre and A.R. Bishop, "Analytic solutions for nonlinear waves in coupled reacting systems," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol.305, no.3-4, pp.427-436, Mar. 2002.

[3] I. Belykh, M. Hasler, M. Lauret and H. Nijmeijer, "Synchronization and graph topology," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol.15, no.11, pp.3423-3433, Nov. 2005.

[4] C.M. Gray, "Synchronous oscillations in neural systems: mechanisms and functions," *J. Computational Neuroscience*, vol.1, pp.11-38, 1994.

[5] R. Stoop and C. Wagner, "Neocortex's architecture optimizes computation, information transfer and synchronizability, at given total connection length," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.17, no.7, pp.2257-2279, 2007.

[6] T. Suezaki and S. Mori, "Mutual synchronization of two oscillators," *Trans. IECE*, vol.48, no.9, pp.1551-1557, Sep. 1965.

[7] H.B. Fotsina and J. Daafouza, "Adaptive synchronization of uncertain chaotic colpitts oscillators based on parameter identification" *Physics Letters A*, vol.339, pp.304-315, May. 2005.

[8] T. Endo and S. Mori, "Mode analysis of a multimode ladder oscillator," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.23, pp.100-113, Feb. 1976.

[9] T. Endo and S. Mori, "Mode analysis of two-dimensional low-pass multimode oscillator," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.23, pp.517-530, Sep. 1976.

[10] T. Endo and S. Mori, "Mode analysis of a ring of a large number of mutually coupled van der Pol oscillators," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.25, no.1, pp.7-18, Jan. 1978.

[11] Y. Uwate, Y. Nishio and R. Stoop, "Synchronization in Two Polygonal Oscillatory Networks Sharing a Branch," *Proc. of NDES'10*, pp. 62-65, May 2010.

[12] Y. Uwate and Y. Nishio, "Synchronizing Coupled Oscillators in Polygonal Networks with Frustration," *Proc. of ISCAS'11*, pp. 745-748, May 2011.