

正四面体結合された四つの発振器の同期現象に関する研究

永井 隆博[†] 糸野 紘範[†] 上手 洋子[†] 西尾 芳文[†]

[†] 徳島大学工学部 〒770-8506 徳島県徳島市南常三島町 2-1

E-mail: †{nagataka, kumeno, uwate, nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

あらまし 本研究では、正四面体結合された4つの発振器で観測される同期現象について研究する。我々は、発振器として van der Pol 発振器を用いる。コンピュータシミュレーションにより、発振器間の位相差および同相・逆相状態の滞在時間について調査を行う。

キーワード 同期現象、結合発振器、四面体

Investigation of Synchronization in Four Coupled van der Pol Oscillators by a Regular Tetrahedron Form

Takahiro NAGAI[†], Hironori KUMENO[†], Yoko UWATE[†], and Yoshifumi NISHIO[†]

[†] Department of Electrical and Electronic Engineering, Tokushima University
2-1 Minami-Josanjima, Tokushimashi, Tokushima, 770-8506, Japan
E-mail: †{nagataka, kumeno, uwate, nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

Abstract In this study, we investigate the synchronization in four coupled van der Pol oscillators in tetrahedron form. We use four coupled van der Pol oscillators and observe the phase difference between each oscillator. In addition, we distinguish in-phase and anti-phase depending on the phase difference and calculate sojourn time of in-phase and anti-phase.

Key words Synchronization, Coupled Oscillators, Tetrahedron Form

1. ま え が き

結合発振器システムは自然科学分野において高次元の非線形現象を表現するモデルとして適している。そのため、結合発振器の同期現象に関する研究は多くの研究分野にて報告されている [1] ~ [7]。また、結合発振器システムは興味深い位相パターンを生み出すため複雑な波形模様を含んでいる。しかしながら、発振器の同期現象はまだ十分に解析されておらず、高次元の非線形現象を表現するためにより複雑な同期現象について研究する必要があると考えられる。

以前の研究では、図 1 に示されたような正三角形に結合された三つの van der Pol 発振器に関する同期現象について研究した [8]。この回路システムでは、結合発振器の数は奇数となっており、結合された発振器は同相、或いは逆相状態で同期することができない。すなわち、三相同期（位相差：120°）状態が観測される。

我々はよりフラストレーションの強い結合発振器システムを用いることで、興味深い同期現象が得られることができると考えた。本研究では、図 2 に示されたような正四面体の形に結合した四つの van der Pol 発振器について調査を行う。結合され

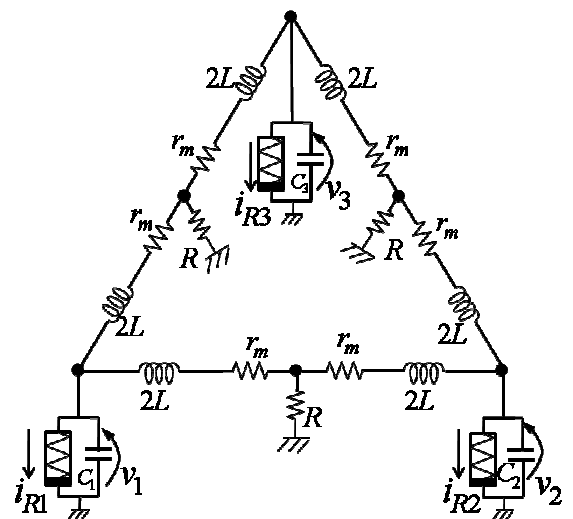


図 1 三結合 van der Pol 発振器。

た四つの van der Pol 発振器の各発振器の位相差はコンピュータシミュレーションによって計測される。さらに、非線形性の度合いや結合強度のパラメータを変化することで同相あるいは逆相の滞在時間について調査を行う。

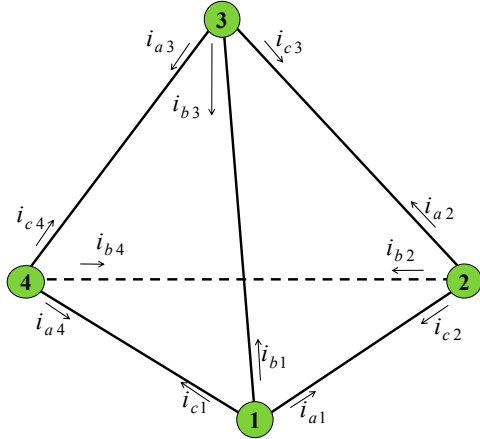


図 2 正四面体の概略図.

2. 回路モデル

図 3 は正四面体の形に結合された四つの van der Pol 発振器の回路モデルである。van der Pol 発振器はインダクタ、負性抵抗、キャパシタから構成される。この回路モデルでは、隣接した発振器同士はインダクタを通して抵抗によって結合される。

本研究では、それぞれの頂点から流れる電流は i_{ak} 、 i_{bk} 、 i_{ck} 、キャパシタの電圧を v_k 、負性抵抗に流れる電流を i_{Rk} とする。また発振器を四つ接続するとき、 L ループを避けるために微小抵抗 r_m を接続する。 L ループが回路内で発生すると、回路シミュレーションを正常に実行することができない。

回路シミュレーションにおいて、各発振器の非線形抵抗の $v_k - i_{Rk}$ 特性は以下の三次元多項方程式で与えられる。

$$i_{Rk} = -g_1 v_k + g_3 v_k^3 \quad (g_1, g_3 > 0), \quad (1)$$

($k = 1, 2, 3, 4$).

正規化後の回路方程式を以下ようになる。

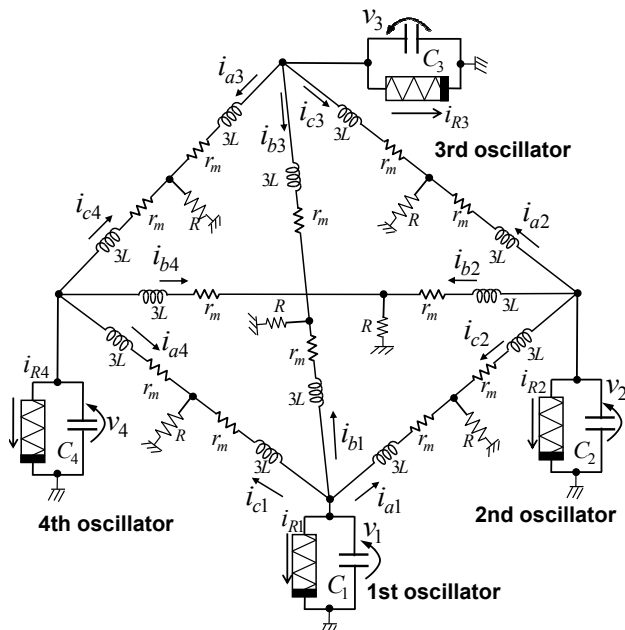


図 3 四結合 van der Pol 発振器.

[First oscillator]

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon(1 - x_1^2)x_1 - (y_{a1} + y_{b1} + y_{c1}) \\ \frac{dy_{a1}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_1 - \eta y_{a1} - \gamma(y_{a1} + y_{c2})\} \\ \frac{dy_{b1}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_1 - \eta y_{b1} - \gamma(y_{b1} + y_{b3})\} \\ \frac{dy_{c1}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_1 - \eta y_{c1} - \gamma(y_{c1} + y_{a4})\}. \end{cases} \quad (2)$$

[Second oscillator]

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{d\tau} = \varepsilon(1 - x_2^2)x_2 - (y_{a2} + y_{b2} + y_{c2}) \\ \frac{dy_{a2}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_2 - \eta y_{a2} - \gamma(y_{a2} + y_{c3})\} \\ \frac{dy_{b2}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_2 - \eta y_{b2} - \gamma(y_{b2} + y_{b4})\} \\ \frac{dy_{c2}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_2 - \eta y_{c2} - \gamma(y_{c2} + y_{a1})\}. \end{cases} \quad (3)$$

[Third oscillator]

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{d\tau} = \varepsilon(1 - x_3^2)x_3 - (y_{a3} + y_{b3} + y_{c3}) \\ \frac{dy_{a3}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_3 - \eta y_{a3} - \gamma(y_{a3} + y_{c4})\} \\ \frac{dy_{b3}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_3 - \eta y_{b3} - \gamma(y_{b3} + y_{b1})\} \\ \frac{dy_{c3}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_3 - \eta y_{c3} - \gamma(y_{c3} + y_{a2})\}. \end{cases} \quad (4)$$

[Fourth oscillator]

$$\begin{cases} \frac{dx_4}{d\tau} = \varepsilon(1 - x_4^2)x_4 - (y_{a4} + y_{b4} + y_{c4}) \\ \frac{dy_{a4}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_4 - \eta y_{a4} - \gamma(y_{a4} + y_{c1})\} \\ \frac{dy_{b4}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_4 - \eta y_{b4} - \gamma(y_{b4} + y_{b2})\} \\ \frac{dy_{c4}}{d\tau} = \frac{1}{3}\{x_4 - \eta y_{c4} - \gamma(y_{c4} + y_{a3})\}. \end{cases} \quad (5)$$

ここで、変数変換とパラメータは下式に示す。

$$t = \sqrt{LC}\tau, v_k = \sqrt{\frac{g_1}{g_3}} x_k, i_{ak} = \sqrt{\frac{g_1 C}{g_3 L}} y_{ak},$$

$$i_{bk} = \sqrt{\frac{g_1 C}{g_3 L}} y_{bk}, i_{ck} = \sqrt{\frac{g_1 C}{g_3 L}} y_{ck},$$

$$\varepsilon = g_1 \sqrt{\frac{L}{C}}, \gamma = R \sqrt{\frac{C}{L}}, \eta = r_m \sqrt{\frac{C}{L}},$$

($k=1, 2, 3, 4$),

この回路方程式において、 ε は発振器の非線形性、 γ は結合強度、 η は抵抗成分を示すパラメータである。この回路方程式を用いて近接した発振器間の位相差について調査を行う。

3. 同期現象

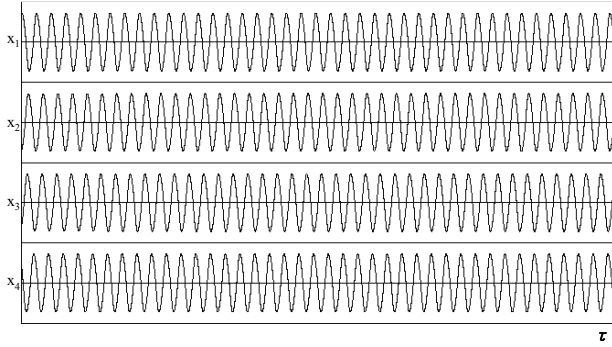


図 4 電圧の時間波形図.

正四面体の形に結合された四つの van der Pol 発振器回路に関する回路シミュレーションを実行する。図 4 に本研究で用いた回路モデルのキャパシタ電圧の時間波形を示す。横軸は回路シミュレーションの時間を示し、縦軸は電圧を示している。図 5 に図 4 で示された時の近接した発振期間の位相差を示す。この図は、シミュレーションを実行してからしばらく時間が経っており、位相差が時間により変化している。本研究ではいずれの発振器の組み合わせでも位相差が 0° から 180° まで周期的に変化することを確認した。

図 6 はあるパラメータを指定したときの位相差の変化を示す一例である。($\epsilon = 0.50$, $\eta = 0.02$, $\gamma = 0.15$ (図 6(a)), $\gamma = 0.40$ (図 6(b)).) この図は各発振器の時間に対する位相差の変

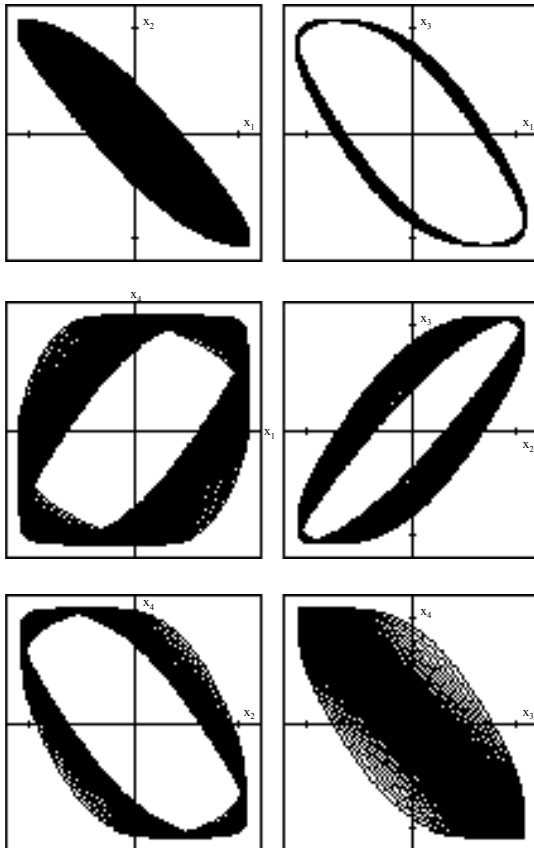


図 5 リサージュ図.

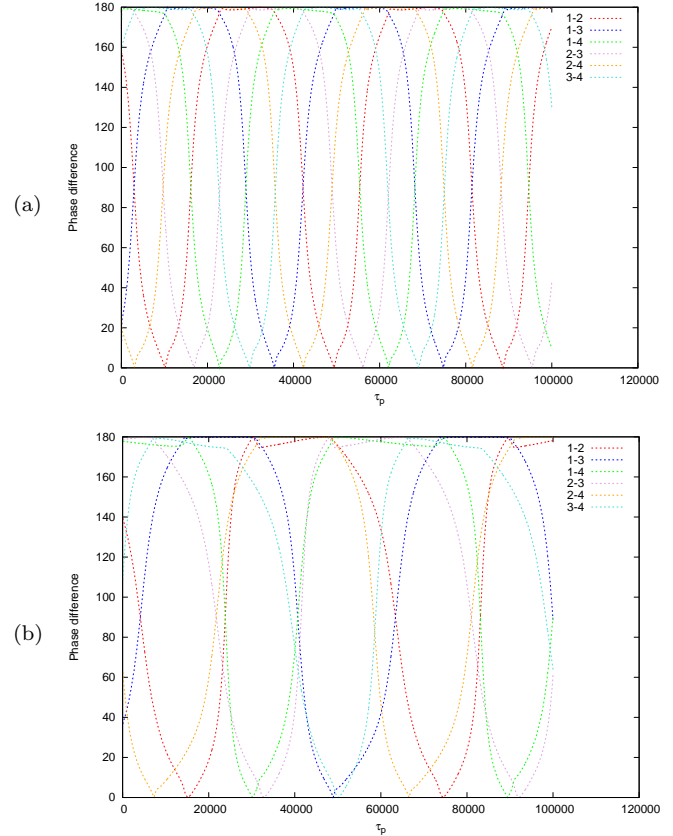


図 6 各発振器間の位相差 $\epsilon = 0.5$, $\eta = 0.02$. (a) $\gamma = 0.15$. (b) $\gamma = 0.40$.

化を示している。ここで図 6 中の”1-2”は一つ目の発振器と二つ目の発振器の位相差を示す。

この図において、すべての発振器の位相差は周期的に変化すると考えられる。加えて、逆相の滞在時間は同相の滞在時間が一瞬であるのに対し、相対的に長いことがわかる。また図 6(b)と比較すると、 γ が増加することで、位相差の変化の周期はより長くなっている。それゆえ、図 6(b)では逆相に滞在する時間が図 6(a)よりも長くなっていることがわかる。

4. 滞在時間

この章では同相や逆相の滞在時間について研究する。ここでは、位相差に関する同期状態を二種類に区別する。滞在時間とは同相もしくは逆相の状態を保っている時間を表している。本研究では、同相状態を位相差が 0° から 20° とし、逆相状態は位相差が 160° から 180° の場合とする。そして、数周期回路シミュレーションを実行し、シミュレーション結果より滞在時間の平均を算出する。このシミュレーションでは、一つ目の発振器と二つ目の発振器に限定して観測する。

まず ϵ の変化を観測するために γ と η を固定する。図 7 に ϵ を変化したときの滞在時間のシミュレーション結果を示す。図 7(a) は $\gamma=0.15$ とし、図 7(b) は $\gamma=0.40$ とした場合である。この図では、逆相の滞在時間は同相の滞在時間より長くなっていることが分かる。つまり、位相差は同相の領域より逆相の領域に長い間滞在すると考えられる。逆相領域では、 ϵ の値を増加

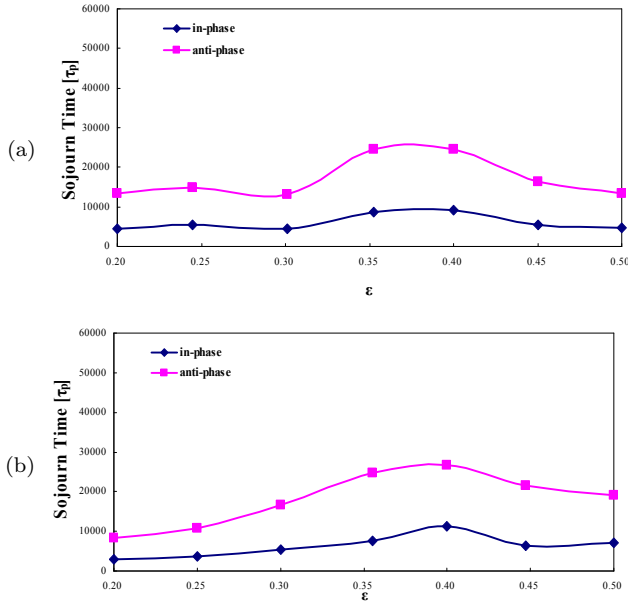


図7 $\eta = 0.02$ の時の滞在時間の ε の推移:(a) $\gamma = 0.15$. (b) $\gamma = 0.40$.

することで、 γ の値に関係なく滞在時間は長くなることが分かる。しかし ε の値が 0.40 を越えると滞在時間は短くなることが言える。また同相領域では、いずれの γ の場合でも ε の値を増加させても滞在時間に大きな変化はない。

次に、 η と ε を固定し γ を変化させシミュレーションを実行する。図8はパラメータ γ の変化させた場合のシミュレーション結果を示している。図8(a)ではパラメータを $\varepsilon=0.20$ に固定し、図8(c)では $\varepsilon=0.50$ に固定する。図8(a)と(c)を比較すると、おおそ γ の値が 0.05 から 0.35 の範囲で滞在時間が長くなっていることがわかる。また γ が小さいとき或いは、大きいとき滞在時間は短くなる。つまり結合強度 γ を小さくするか、大きくすることで位相差の変化はより鋭敏になる考えられる。

一方図8(b)($\varepsilon=0.35$)は、図7のグラフにおいて、滞在時間が他の ε の値よりも比較的長かった場合の結果である。この図では、 γ の値を変化させても、滞在時間が一樣に長いことがわかる。

5. ま と め

本研究において、正四面体の形をした結合された四つの発振器について回路シミュレーションを実行し、位相差が周期的に変化する同期現象を観測した。この位相差の変化は非線形性をを弱くすることで変化がより急峻となることがわかった。加えて結合強度を増加することで、逆相の状態はより長く続いた。さらに、入力したパラメータを変化することによって滞在時間は非常に変化すると考えられる。

文 献

- [1] L.L. Bonilla, C.J. Perez Vicente and R. Spigler, “Time-periodic phases in populations of nonlinearly coupled oscillators with bimodal frequency distributions,” *D: Nonlinear Phenomena*, vol.113, no.1, pp.79-97, Feb. 1998.
- [2] J.A. Sherratt, “Invading wave fronts and their oscillatory wakes are linked by a modulated traveling phase resetting

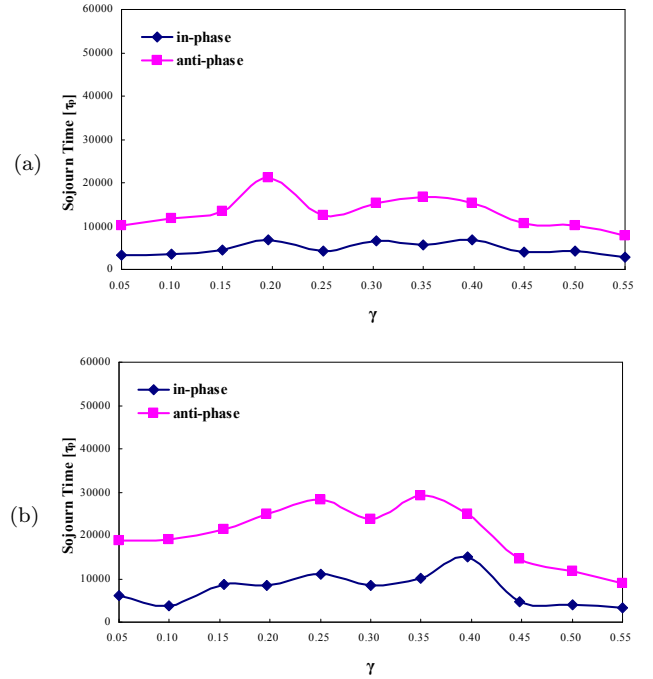
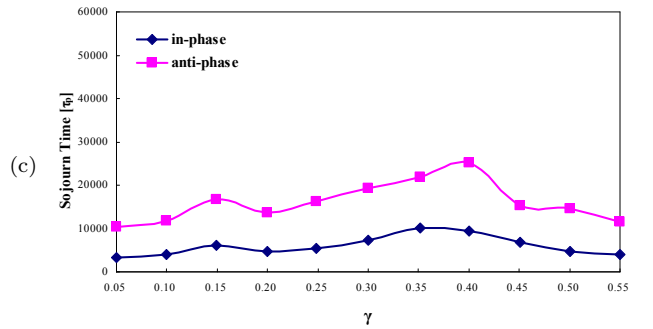


図8 $\eta = 0.02$ の時の滞在時間の γ の推移:(a) $\varepsilon = 0.20$. (b) $\varepsilon = 0.35$ (c) $\varepsilon = 0.50$.



wave,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol.117, no.1-4, pp.145-166, June 1998.

- [3] G. Abramson, V.M. Kenkre and A.R. Bishop, “Analytic solutions for nonlinear waves in coupled reacting systems,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol.305, no.3-4, pp.427-436, Mar. 2002.
- [4] I. Belykh, M. Hasler, M. Lauret and H. Nijmeijer, “Synchronization and graph topology,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.15, no.11, pp.3423-3433, Nov. 2005.
- [5] C.M. Gray, “Synchronous oscillations in neural systems: mechanisms and functions,” *J. Computational Neuroscience*, vol.1, pp.11-38, 1994.
- [6] R. Stoop and C. Wagner, “Neocortex’s architecture optimizes computation, information transfer and synchronizability, at given total connection length,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.17, no.7, pp.2257-2279, 2007.
- [7] T. Suezaki and S. Mori, “Mutual synchronization of two oscillators,” *Trans. IEECE*, vol.48, no.9, pp.1551-1557, Sep. 1965.
- [8] Y. Uwate, Y. Nishio and R. Stoop, “Synchronization in three coupled van der Pol oscillators with different coupling strength,” *Proc. of NCSP’10*, pp.109-112, Mar. 2010.