

アニーリングノイズを利用したBPによるCNNテンプレート設計

那賀川 雅[†] 上手 洋子[†] 西尾 芳文[†]

[†] 徳島大学工学部 〒770-8506 徳島県徳島市南常三島町 2-1

E-mail: †{miyabi, uwate, nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

あらまし 我々はこれまでの研究で、バックプロパゲーション (Back Propagation: BP) を用いたセルラニューラルネットワーク (Cellular neural Networks: CNN) のテンプレート設計を提案した。本提案手法では、設計されたテンプレートによって出力された画像と教師画像との平均誤差を用いてテンプレートを更新することで、学習を行う。本研究では、テンプレート更新時に局所解に陥ることを防ぐためにアニーリングノイズを提案し、CNN の状態方程式に加える場合とBPに加える場合とを比較することでその精度を示す。

キーワード セルラニューラルネットワーク, バックプロパゲーション, アニーリング

Template Design of CNN by BP with Annealing Noise

Masashi NAKAGAWA[†], Yoko UWATE[†], and Yoshifumi NISHIO[†]

[†] Department of Electrical and Electronic Engineering, Tokushima University

2-1 Minami-Josanjima, Tokushimashi, Tokushima, 770-8506, Japan

E-mail: †{miyabi, uwate, nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

Abstract In previous study, we proposed template design method of cellular neural networks with back propagation algorithm. In this proposed method, template learns by using the average error which corresponds to the difference between the outputted image produced by the designed template and the teacher image. In this study, we propose an annealing noise, in order to prevent getting into a local minimum when template updated. And we show accuracy of annealing noise with comparing the case it adding to state equation of cellular neural networks with the case it adding to back propagation algorithm.

Key words Cellular Neural Networks, Back Propagation, Annealing

1. はじめに

セルラニューラルネットワーク (Cellular Neural Networks: CNN)[1] は 1988 年に L.O.Chua らによって開発された。CNN はセルラオートマトンの構造とニューラルネットワークを元に考えられている。CNN は従来のニューラルネットワークとは異なり、局所的結合の特性を持つため LSI 化に適しており、また CNN の構造が動物の網膜の構造に類似しているため、様々な画像処理 [2]-[4] を行うのに適している。

CNN における各セルの関係性はテンプレートと呼ばれるパラメータによって確立される。テンプレートは CNN において最も重要なパラメータである。なぜなら CNN の振る舞いはテンプレートによって決められるからである。従って、いくつかのテンプレート学習というものも提案されており、その代表として Genetic Algorithm(GA)[5] などが有名である。

これまでの研究において、私たちは CNN のテンプレート学習にバックプロパゲーションアルゴリズム (Back Propagation

Algorithm: BP) を用いたものを提案し、その精度を評価した [6]。BP は階層型ニューラルネットワークに用いられる学習アルゴリズムの一つである [7]。これまでの研究では、出力画像と教師画像との誤差から BP を用いることで動的に CNN のテンプレートの更新を行なった。その結果、2 値化画像を用いた例において、教師画像を出力できるテンプレートを設計することができた。そして、BP における学習回数と学習率を変化させることでより詳細な調査を行ない、より良いテンプレート設計の条件を確認することができた。しかしながら、BP には解が局所解に陥り最適解に到達できない問題点がある。

本研究では、焼きなまし法 (Simulated Annealing: SA)[8] の考えを元にしたアニーリングノイズを提案し、それを CNN の状態方程式に加える場合と BP 学習によるテンプレート更新時に加える場合を比較することで局所解を抜け出し最適解に到達する条件を確認する。

2. セルラニューラルネットワーク

本章では、CNN の基本的な構造について説明する。CNN は $M \times N$ 行列のセルと呼ばれるユニットを持った回路である。あるセルを $C(i, j)$ と示す。この時、 i は縦位置における変数で、 j は横位置における変数である。またそれぞれのセルは近傍のセルと繋がっており、テンプレートに従って変化する。一般に、テンプレートは境界のセルを除いた全てのセルに適用される。また CNN は時間の連続性、非線形性、並列処理能力の特徴を持っている。

CNN には処理を決める重要な 2 式から構成されており、状態方程式と出力方程式と呼ぶ。それらを以下に示す。

状態方程式：

$$\begin{aligned} \frac{dv_{xij}(t)}{dt} = & -v_{xij}(t) + \sum_{k=i-r}^{i+r} \sum_{l=j-r}^{j+r} A_{(i,j;k,l)} v_{ykl}(t) \\ & + \sum_{k=i-r}^{i+r} \sum_{l=j-r}^{j+r} B_{(i,j;k,l)} v_{ukl}(t) + I \end{aligned} \quad (1)$$

出力方程式：

$$v_{yij}(t) = \frac{1}{2} (|v_{xij} + 1| - |v_{xij} - 1|) \quad (2)$$

ここで、 V_x 、 V_y 、 V_u はそれぞれセルの状態と出力、そして初期の入力を示す変数である。式 (1) において、 A 、 B 、 I をテンプレートと呼び、 A にはフィードバックテンプレート、 B にはコントロールテンプレート、 I にはバイアスという名前がそれぞれ付いている。このテンプレートの値により、CNN の振る舞いが決定される。

3. バックプロパゲーション

BP はフィードフォワードネットワークにおける最も有名な学習方法の一つである。BP は出力信号と教師信号の間の誤差を用いて学習を行う。ネットワークにおける合計の誤差 E は以下の式で定義される。

$$E = \sum_{p=1}^P E_p = \sum_{p=1}^P \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (t_{pi} - o_{pi})^2 \right\} \quad (3)$$

ここで P は入力データの数、 N は出力層におけるニューロンの数、 t_{pi} は p 番目の入力データに対する教師データ、そして o_{pi} は p 番目の入力データに対する出力データを示している。学習の最終目標は誤差 E が最小となるようなネットワークのすべての層の間にある結合荷重 w を見つけ出すことである。 E を最小とするためには、以下の式を用いて結合荷重を調整してやる必要がある。

$$\begin{aligned} w_{i,j}^{k-1,k}(m+1) &= w_{i,j}^{k-1,k}(m) + \sum_{p=1}^P \delta_p w_{i,j}^{k-1,k}(m) \\ \delta_p w_{i,j}^{k-1,k}(m) &= -\eta \frac{\partial E_p}{\partial w_{i,j}^{k-1,k}} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $w_{i,j}^{k-1,k}$ は $k-1$ 層目の i 番目のニューロンと k 層目の j 番目のニューロンの間にある結合荷重を、 m は学習回数

を、そして η は学習率と呼ばれるパラメータをそれぞれ示している。

このように、BP は結合荷重を変化させることで出力信号を教師信号へと近づけている。

4. シミュレーテッドアニーリング

物質を融解状態になるまで加熱し、徐々に冷却する操作を焼きなまし (アニーリング) と言う。この焼きなましにより、エネルギーが最も少ない状態に分子が配列し、結晶構造を形成することができる。この物理的なプロセスをシミュレーション上で模擬して最適化問題を解く手法をシミュレーテッドアニーリング (Simulated Annealing: SA) と呼ぶ。

SA の基本アルゴリズムは温度 T を初期設定した後、与えられた状態 x_0 から次の状態 x' を生成し、そのエネルギー E' を計算する。そしてエネルギー差分 $\Delta E (= E - E')$ と温度 T_k に応じて受理か否かを判断し、受理ならば次の状態に移る。この処理を式 (5) に示す。

$$ACCEPT(E, E', T) = \begin{cases} 1 & (\Delta E < 0) \\ \exp(-\frac{\Delta E}{T}) & (otherwise) \end{cases} \quad (5)$$

この処理を繰り返して、現在の温度で安定すると次の温度 T_{k+1} に移り、再び安定するまで処理を続ける。

$$T_{k+1} = \gamma T_k \quad (0.8 \leq \gamma < 1) \quad (6)$$

こうして温度が十分冷えて終了条件に達すればその時の状態を最適状態、最適値として出力する。

5. 提案手法

本章では、提案手法である BP を用いたテンプレート学習について説明する。私たちのテンプレート学習方法は、BP アルゴリズムの動的で柔軟な点を元に考えられている。BP ニューラルネットワークでは、出力と教師信号の間にある誤差を用いてパラメータを変化させることで出力信号を教師信号へと近づけている。この学習方法から、本提案手法では CNN のテンプレートを出力画像と教師画像の誤差を用いて変化させることで教師画像を得られる。また、本提案手法におけるテンプレートは常に学習し続けているため動的であると言える。

以下、学習方法について説明する。まずはじめに BP を用いたテンプレートの学習方法について説明し、続いて 4 つのパターンでパラメータを変化させた学習結果を示す。

5.1 テンプレート学習の手順

BP を用いたテンプレート学習の手順について示す。

Step 1: 入力画像と教師画像の準備

まず入力画像と、それに対する教師画像を用意する。テンプレートの初期値はランダムで決定される。これはいかなる初期値からでも学習できることを示すためである。しかし、この学習においては CNN が収束する安定条件についても考慮している。つまり A テンプレートの中心要素は 1 で、左右対称となっている。

Step 2: CNN 処理

CNN はルンゲクッタ法を用いて処理される．この時ルンゲクッタ法の刻み幅はできるだけ小さくし，常に変化し続けている状態を作ることにより動的に学習する状態を作っている．

Step 3: 出力画像と教師画像の誤差計算

出力画像と教師画像のそれぞれのピクセルにおける誤差を計算する．誤差 E_p は以下の式で計算される．

$$E_p = (t_p - o_p) \quad (7)$$

ここで p は入力画像のピクセル数， t_p と o_p は教師画像と出力画像の p 番目のピクセルの値を示している．

Step 4: 修正方向の決定

修正する方向 δ_p は誤差 E_p を用いて以下の式で表される．

$$\delta_p = E_p \times (Vx_p^{now} - Vx_p^{past}) \quad (8)$$

ここで Vx_p^{now} と Vx_p^{past} は Vx_p の現在の値と Vx_p のひとつ前の値を示している．この差分を取ることでどの方向へ修正すべきかを決定する．

Step 5: 修正量の計算

それぞれのピクセルにおける修正量 Δ_p は以下の式で表される．

$$\Delta_p = \eta \times \delta_p \times Vy_p^{now} \quad (9)$$

ここで η は学習率を示している．

Step 6: 平均誤差の計算

すべてのピクセルの誤差は一度合計され，その平均誤差 D が以下の式で表される．

$$D = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \Delta_i \quad (10)$$

本研究では，テンプレートのそれぞれの要素は式 (11) を用いている．これは，入力画像に二次元画像を用いているためである．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = i \quad (11)$$

そして，テンプレートの更新式は以下で表される．

$$a_{21}^{Renewed} = a_{21}^{Before} + D$$

$$a_{23}^{Renewed} = a_{23}^{Before} + D$$

$$b_{21}^{Renewed} = b_{21}^{Before} + D$$

$$b_{22}^{Renewed} = b_{22}^{Before} + D$$

$$b_{23}^{Renewed} = b_{23}^{Before} + D \quad (12)$$

平均誤差 D は A テンプレートと B テンプレートの真ん中の一列の要素に加えられる．しかし，安定条件を保つために A テンプレートの中心要素とバイアス I は含まれていない．つまり，どのようにテンプレートが学習されたとしても安定条件は満たされているため，CNN の収束は保証されている．

Step 7: 繰り返し

Step 2 から Step 6 までを学習回数分繰り返す．

この学習アルゴリズムを用いることで，それぞれのセルのテンプレートは更新され，教師画像へと近づいていく．

5.2 4 種類の学習パターンにおける手順

本研究では，BP の学習回数と学習率に着目し 4 種類の学習パターンと 7 種類の学習率を準備した．4 種類の学習パターンを以下の表 1 に示す．

表 1 学習パターン

| | 学習回数 | 入力画像の パターン数 | グループの 繰り返し回数 | 合計学習回数 |
|-----------|------|----------------|-----------------|--------|
| Pattern 1 | 10 | 20 | 10 | 2000 |
| Pattern 2 | 25 | 20 | 4 | 2000 |
| Pattern 3 | 50 | 20 | 2 | 2000 |
| Pattern 4 | 100 | 20 | 1 | 2000 |

学習回数とは BP の学習回数を，入力画像のパターン数は 1 グループにおける入力と教師画像のセット数を，繰り返し回数は 1 グループの繰り返し回数をそれぞれ示している．

以下に処理の手順を示す．

Step 1. 入力画像と教師画像の準備

まず最初に，入力画像と教師画像のセットを 20 種類用意する．これを 1 グループと定義する．

Step 2. 学習率とテンプレートの初期値の決定

学習率を 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1 の 7 種類から選ぶ．そしてテンプレートの初期値の値はランダムで決定される．

Step 3. CNN

20 種類の入力画像と教師画像のセットの内 1 つを選び，Step 2 で設定されたテンプレート初期値を用いて CNN 処理を行う．

Step 4. BP

初期設定されたテンプレートが BP によって学習される．4 種類の学習回数である 10, 25, 50, 100 回の内一つを選んで学習を行う．この時，学習率は Step 2 で決められた値を用いる．

Step 5. 入力画像と教師画像のセットを変更する

BP を用いてテンプレート学習を行った後，入力画像と教師画像のセットを次の組み合わせに変更する．また，学習後のテンプレートを次の CNN 処理のテンプレートに設定する．

Step 6. 繰り返し

Step 3 から Step 5 までを 20 セットすべてが終了するまで繰り返す。この時、最後の学習によって更新されたテンプレートを最終的なテンプレートとする。

Step 7. グループ繰り返し

BP の学習回数が 10, 25, 50 回の際には、それぞれグループを 10, 4, 2 回繰り返す。この時、Step 6 で学習を終えたテンプレートを次のループの初期テンプレートと設定する。

Step 8. 学習されたテンプレートの獲得

すべての学習が終了後、得られたテンプレートを最終的なテンプレートとする。

学習のパターンは異なるが、どのパターンも最終的には 2000 回の学習を行ったと言える。

5.3 アニールリングノイズ

本研究では、BP を用いる時に発生する局所解の問題を解決するためにアニールリングノイズを提案する。アニールリングノイズを加えることで、解が局所解に陥ることを阻止し最適解へと収束することができる。

実際に加えるアニールリングノイズ ϵ を以下の式で表す。

$$\epsilon = SN \text{ 比} \times 1 - \frac{\text{現在の学習回数}}{\text{全体の学習回数}} \times \text{ランダムノイズ} \quad (13)$$

実際の SA では温度パラメータ T をスケジュールによって減らすことで加えるノイズを減少させているが、本研究では学習回数を時間軸と見立て、学習を増すごとに加えるノイズを減らしていくように提案した。

例えば、全体の学習回数が 100 回であるとき、現在が 1 回目ならば $\frac{99}{100} = 99\%$ とほとんどすべてのノイズを加えることになるが、学習がほぼ終わる 99 回目ならば $\frac{1}{100} = 1\%$ とほぼ 0 に近いノイズを加えることになる。

本研究では、このアニールリングノイズを次の二つに加えた場合を比較して、最適解に到達する条件を確認する。

Pattern 1. CNN の状態方程式

$$\frac{dv_{xij}(t)}{dt} = -v_{xij}(t) + \sum_{k=i-r}^{i+r} \sum_{l=j-r}^{j+r} A_{(i,j;k,l)} v_{ykl}(t) + \sum_{k=i-r}^{i+r} \sum_{l=j-r}^{j+r} B_{(i,j;k,l)} v_{ykl}(t) + I + \epsilon \quad (14)$$

Pattern 2. テンプレートの更新式

$$(A, B)^{Renewed} = (A, B)^{Before} + D + \epsilon \quad (15)$$

CNN の状態方程式に加えた場合では、CNN の収束を意図的に妨げることで最適な出力画像を得られるかを調査する。

また、テンプレートの更新式では、通常の SA が行われる場合と同様に BP に加えることで BP が局所解に陥ることを妨げ、最適解に得られるかを調査する。

6. シミュレーション結果

6.1 学習に使われたパラメータ

このシミュレーションにおいて用いられたパラメータを表 2 に示す。

表 2 パラメータ

| パラメータ | 値 |
|----------|-------------------|
| 刻み幅 | 0.01 |
| 繰り返し最大回数 | 1000 |
| 画像のピクセル数 | 40 |
| 学習率 | 5.2 章 Step 2. に記載 |
| SN 比 | 0.1 |
| ランダムノイズ | -1.0 ~ 1.0 |

刻み幅と繰り返し最大数はルンゲクッタ法におけるパラメータである。また学習率は式 (9) における η のことを示す。

6.2 入力画像と教師画像

本研究では、1 次元 2 値化画像を用いてシミュレーションを行った。40 個のピクセルはすべてランダムに配置されている。また黒ピクセルはシミュレーション上では +1、白ピクセルは -1 をそれぞれ示す。

次に、教師画像は以下のルールに従って作成する。

Rule 1. あるセルの両隣が同じ色ならば、そのセルは両隣の色に変化する。

Rule 2. あるセルの両隣が異なる色ならば、そのセルの色がそのまま出力される。

つまり、オセロのルールに従って教師画像を作成した。

図 1 と図 2 に、入力画像と教師画像の一例を示す。

入力画像：



図 1 入力画像

教師画像：



図 2 教師画像

6.3 提案手法のシミュレーション結果

はじめに、入力画像とは異なる 10 種類の入力画像を用意した。この画像もピクセルはランダムに並びかえられている。これらの画像は、シミュレーションによって作成された 28 種類のテンプレートの精度を確認するためである。そのため、それぞれのテンプレートを使用して 10 種類の入力画像に対して CNN 処理を行った。その時のそれぞれの教師画像との誤差を平均した平均誤差を表 3 に示す。

この結果より、以下のことが言える。

結果 1. 学習率が高いほど良い

学習率が高いほど良い結果となった。これは、学習率が高くなればなるほど学習によって更新する幅が大きくなるため、より動的な学習が行われているためだと思われる。ただし、更新幅が大きいと最適解に近づく速度は速くなるが、収束しにくくなる可能性がある。

表 3 平均誤差 [%]

| 平均誤差 [%] | | | | | |
|----------|------|-------|-------|-------|-------|
| 学習回数 | 10 | 25 | 50 | 100 | |
| 学習率 | 0.01 | 15.75 | 30.75 | 35.75 | 25 |
| | 0.05 | 21.5 | 21.75 | 11.75 | 23 |
| | 0.1 | 0 | 18.5 | 14.75 | 27 |
| | 0.25 | 8.75 | 18.5 | 11.75 | 21.75 |
| | 0.5 | 4 | 12.75 | 9.5 | 21.75 |
| | 0.75 | 4 | 8.75 | 13.5 | 12.75 |
| | 1 | 3.25 | 3.75 | 5.5 | 14 |

結果 2. 学習が少ないほど良い

学習回数が少なく、全体のループ数が多いほど良い結果となった。これは、学習回数が多い場合には収束をし切ってしまう無駄な学習が出てしまう、さらに全体のループ数が少ないためその分を補えないからで、学習回数が少なくループ数が多いとより動的に動き続けて常に更新している状態を保てるため良い結果が出たと思われる。

これらの結果より、学習率が高く学習回数が少ないほど良い結果が出るということがわかった。

6.4 CNN の状態方程式にアニーリングノイズを加えた場合

次に、アニーリングノイズを CNN の状態方程式に加えてシミュレーションを行った結果を表 4 に示す。評価方法は 6.3 章と同様の評価方法を行った。

表 4 CNN の状態方程式に加えた場合

| 平均誤差 [%] | | | | | |
|----------|------|-------|-------|------|------|
| 学習回数 | 10 | 25 | 50 | 100 | |
| 学習率 | 0.01 | 15.75 | 12.25 | 5.25 | 5.25 |
| | 0.05 | 2.25 | 19 | 5 | 5.25 |
| | 0.1 | 12.25 | 2.25 | 5.25 | 0.5 |
| | 0.25 | 4.5 | 4.5 | 1.5 | 1.25 |
| | 0.5 | 4.5 | 4.75 | 5.25 | 5.25 |
| | 0.75 | 4.75 | 4.5 | 5.25 | 4.25 |
| | 1 | 5.25 | 5.25 | 4.5 | 4.5 |

この結果より、以下のことが言える。

結果 1. 学習率

最も良い結果が学習率が 0.1~0.25 の時に集まっていることがわかる。本研究ではニューラルネットワークにおける BP を元に考えられているので、ニューラルネットワークにおける適切な学習率に近づいたと言えるため、BP が有効であることを示していると思われる。

結果 2. 学習回数

学習回数が多いほど良い結果が出ていることがわかる。6.3 章の結果と反することになるが、学習回数が少ない場合はノイズが大きく少しずつ加えられていないため、それほど良い結果に繋がらなかったのではないかとと思われる。逆に学習回数が多いとノイズが有効で、また細かく影響しているため良い結果を得られたのではないかとと思われる。

6.5 テンプレート更新時にアニーリングノイズを加えた場合

次に、アニーリングノイズをテンプレート更新時に加えてシミュレーションを行った結果を表 5 に示す。評価方法は 6.3 章、6.4 章と同様の評価方法を行った。

表 5 テンプレート更新時に加えた場合

| 平均誤差 [%] | | | | | |
|----------|------|------|-------|------|------|
| 学習回数 | 10 | 25 | 50 | 100 | |
| 学習率 | 0.01 | 9.75 | 12 | 2.25 | 5 |
| | 0.05 | 5.25 | 15.25 | 4.75 | 4.5 |
| | 0.1 | 1.25 | 1.5 | 1.5 | 2 |
| | 0.25 | 5.25 | 5 | 4.75 | 1.25 |
| | 0.5 | 4.5 | 5.25 | 1.25 | 5 |
| | 0.75 | 5 | 4.5 | 1.25 | 5 |
| | 1 | 4.5 | 5.25 | 4.5 | 4.5 |

この結果より、以下のことが言える。

結果 1. 学習率と学習回数

6.4 章と同じく、学習率が小さく、学習回数が多いほど良い結果が出るということがわかった。

結果 2. 局所解と最適解

表 4 と比べて、より誤差の小さいところが多くある。これは BP によるテンプレート更新時に加える方がノイズが有効で、局所解に陥りにくく最適解に陥りやすいということを示している。さらに、表 4 と表 5 より、誤差が 4.5%~5.25% の部分が多いことがわかる。これらは最適解に最も近い局所解であると思われる。そのため、アニーリングノイズをテンプレート更新時に加えた方がこの局所解も多く、さらに最適解も多い結果になったのではないかとと思われる。

7. ま と め

本研究では、BP をテンプレート更新に適用し細かな条件下でシミュレーションを行った結果と、アニーリングノイズを CNN の状態方程式に加えた場合、テンプレート学習時に加えた場合の結果との比較を行った。

その結果、アニーリングノイズが有効であることがわかり、さらに BP によるテンプレート更新時の場合が良い結果が出やすいことがわかった。この結果はさらに発展させた複雑な条件下の入力画像や教師画像の組み合わせや、グレースケール画像などにも利用出来ると考えられる。

文 献

- [1] L.O. Chua and L. Yang, "Cellular Neural Networks: Theory," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 32, pp. 1257-1272, Oct. 1988.
- [2] F. Dirk and T. Ronald, "Coding of Binary Image Data using Cellular Neural Networks and Iterative Annealing," Proc. of ECCTD'03, vol. 1, pp. 229-232, Sep. 2003.
- [3] M. Namba and Z. Zhang, "Cellular Neural Network for Associative Memory and Its Application to Braille Image Recognition," Proc. of IJCNN'06, pp. 4716-4721, Jul. 2006.
- [4] H. Koeppl and L.O. Chua, "An Adaptive Cellular Nonlinear Network and its Application," Proc. of NOLTA'07, pp. 15-18, Sep. 2007.
- [5] T. Kozek, T. Roska and L.O. Chua, "Genetic Algorithm for

- CNN Template Learning,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 40, pp. 392-401, Jun. 1993.
- [6] M. Nakagawa, T. Inoue and Y. Nishio, “CNN Template Design Using Back Propagation Algorithm,” Proc. of CNNA’10, pp. 47-51, Feb. 2010.
- [7] D.E. Rumelhart, G.E. Hinton and R.J. Williams, “Learning Internal Representations by Error Propagation,” Parallel Distributed Processing, vol. 1, pp. 318-362, 1986.
- [8] S.Kirkpatrick, C.D.Gelatt and M.P.Vecchi, “Optimization by simulated annealing,” Science, vol. 220, pp. 671-680, 1983.