

# パラメータ強制を含むロジスティック写像の広域結合系における 同期の共存現象

桑野 紘範<sup>†</sup> 西尾 芳文<sup>†</sup> DanieleFournier-Prunaret<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 徳島大学工学部 電気電子工学科 〒770-8506 徳島県徳島市南常三島町 2-1

<sup>††</sup> LATTIS-INSA, Universite de Toulouse 135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse, France

E-mail: <sup>†</sup>{kumeno,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp, <sup>††</sup>daniele.fournier@insa-toulouse.fr

**あらまし** 本研究では、パラメータ強制を含む4つのロジスティック写像の広域結合系に発生する同期現象について調査している。このシステムにおいて、4つの内の全ての写像の同期、4つの内1つの写像以外の同期、同期のスイッチング現象、同期の共存現象などの様々な同期現象が確認されている。とくに同期の共存現象では様々な同期状態の共存が確認された。

**キーワード** 広域結合写像, カオス, 共存現象

## Coexistence Phenomenon in Globally Coupled Logistic Maps Involving Parametric Force

Hironori KUMENO<sup>†</sup>, Yoshifumi NISHIO<sup>†</sup>, and Daniele FOURNIER-PRUNARET<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Dept. of Electrical and Electronic Eng., Tokushima University  
2-1 Minami-Josanjima, Tokushima, 770-8506 Japan

<sup>††</sup> LATTIS-INSA, Universite de Toulouse 135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse, France

E-mail: <sup>†</sup>{kumeno,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp, <sup>††</sup>daniele.fournier@insa-toulouse.fr

**Abstract** Synchronization phenomena in globally coupled logistic maps whose parameters are forced into periodic varying are investigated when maps are coupled. The observed synchronization phenomena are fall into four general categories, which are synchronization of all the maps, synchronization of the total number of the coupled maps minus one map, self-switching phenomenon of synchronization and coexistence phenomenon of synchronization states. Especially, in the coexistence phenomenon of synchronization states, Various combinations of synchronization states are confirmed.

**Key words** Globally coupled maps, Chaos, Coexistence phenomenon

### 1. まえがき

同期は自然の基本的な現象の一つであり、典型的な非線形現象の一つでもある。従って、結合システムにおける同期現象の研究は、物理学 [1]、生物学 [2]、工学など幅広い分野で行われている。パラメータ励振回路は共振回路の一つであり、そこに発生する様々な非線形現象を調査することは将来的な工学応用のために重要である。パラメータ励振を含むシンプルな発振器において、非線形インダクタが飽和特性をもつとき既周期振動が発生することはすでに文献 [3] に報告されており、カオスの発生についても文献 [4],[5] などに言及されている。一次元写像の結合系を用いることでカオス的な素子のネットワークをモデル化することが出来る。カオス的な1次元写像の結合系にお

いて、系に生じる振る舞いは文献 [6]-[8] によって調べられている。特に、Coupled Map Lattice (CML) や Globally coupled Map (GCM) は離散時間系である数学モデルとして非常によく知られており、これらの系では様々なダイナミクスを観察することが出来る。CML や GCM のようなシステムの研究は、多自由度をもった非線形システムのモデルとしてだけではなく、生物ネットワークや工学的応用の為に非常に重要である。我々はこれまで結合ファンデアポール発振器においてパラメータ励振の影響を観測してきた [9]。また、3つのパラメータ強制を含むロジスティック写像の結合系に発生する同期現象を調査している [10]。本研究では、さらに結合数の多い広域結合系に発生する同期現象を調査する。典型的な広域結合システムは次のように与えられる、

$$x_i(n+1) = (1-\varepsilon)f[x_i(n)] + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f[x_j(n)] \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

ここで、 $\varepsilon$  は結合強度である。広域結合写像は全ての写像の平均値がそれぞれの写像に影響を与える型である。本研究では、非常にシンプルな離散方程式で記述されることから、1次元写像としてロジスティック写像を使用する。数学的にロジスティック写像は次のように記述される。

$$x(n+1) = \alpha x(n)(1-x(n)). \quad (2)$$

本研究ではパラメータが周期的に変化するロジスティック写像の広域結合系に発生する同期現象を調査する。まず次章では、パラメータ強制を含むロジスティック写像を紹介し、第3章では、パラメータ強制ロジスティック写像の広域結合系に発生する同期現象について記す。第4章では、同期状態の共存現象について、第5章では、その共存現象が発生するパラメータ領域について記述する。最後にまとめとする。

## 2. パラメータ強制ロジスティック写像

パラメータ強制を含むロジスティック写像は次のように記述される、

$$x(n+1) = \alpha_f(n)x(n)(1-x(n)), \quad (3)$$

そして、

$$\alpha_f(n) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{"n"が偶数のとき} \\ \alpha_2, & \text{"n"が奇数のとき} \end{cases}, \quad (4) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ここで  $\alpha_f(n)$  はパラメータ強制の項で時間的に変動する。このシステムでは、2つのパラメータ  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  が毎更新ごとに入れ替わる。図1はパラメータ強制ロジスティック写像のリターンマップの例である。元のロジスティック写像では、 $\alpha = 3.0$ 、 $\alpha = 3.83$  のとき、それぞれ2周期解と3周期解が得られる。それら2つの解は周期解だが、パラメータ強制されたロジスティック写像では、 $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  をそれぞれ3.0と3.83とすると、図1のようにカオス的な解が得られる。つまり、元のロジスティック写像では周期解となる2種類のパラメータを組み合わせ、周期的に切り替えることでカオス的な解となる。

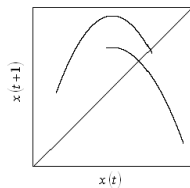


図1 パラメータ強制ロジスティック写像のリターンマップ。 $\alpha_1 = 3.0$ 、 $\alpha_2 = 3.83$ 。

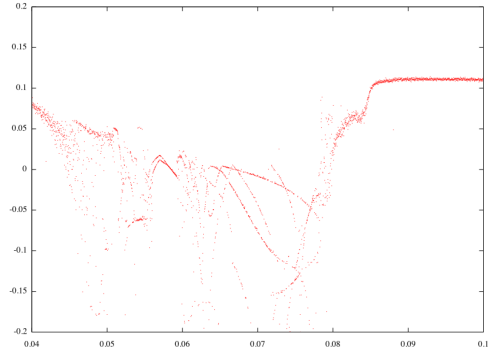


図2 パラメータ強制ロジスティック写像の広域結合系での  $\varepsilon$  に対する最大リアプノフ指数。 $\alpha_1 = 3.0$ 、 $\alpha_2 = 3.83$ 。横軸:  $\varepsilon$ 。縦軸:  $\lambda$ 。

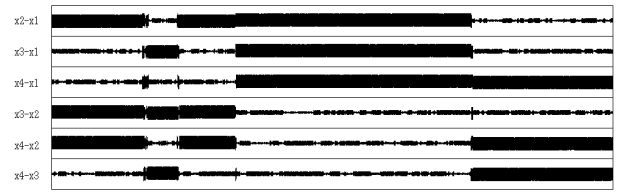


図3 同期の自己スイッチング現象が観測されるときに写像間の差の時系列。 $\varepsilon = 0.045$ 、 $\alpha_1 = 3.0$ 、 $\alpha_2 = 3.83$ 。

## 3. 同期現象

ここでは4つのパラメータ強制されたロジスティック写像の広域結合系に発生する同期現象を調査する。以下のシミュレーションではパラメータ強制ロジスティック写像のパラメータをそれぞれ  $\alpha_1 = 3.0$ 、 $\alpha_2 = 3.8$  とする。

図2は  $\varepsilon$  に対する最大リアプノフ指数である。 $\varepsilon$  を変化させることで様々な同期現象を観測することが出来る。いくつかの観測された同期現象を図3と図4に示す。

まず、 $\varepsilon$  が0のとき、つまりそれぞれの写像が結合されていないとき、リアプノフ指数は正であり、それぞれの写像はカオス的に振る舞う。 $\varepsilon$  が小さいときは全ての写像が非同期である。 $\varepsilon$  を大きくしていくと、 $\varepsilon = 0.045$  付近で図3のような同期の自己スイッチング現象がみられる。この現象は、4つのうち3つの写像が同期し、その同期する写像の組み合わせが時間とともに変化するという現象である。図3は2つの写像間の  $x(n)$  の差の時系列を示している。つまり、振幅が小さいところが同騒動記を表している。図3では、まず、写像1と写像3と写像4が同期している。しかし、時間が経つと、その同期状態は崩壊し、新たに写像1と写像2と写像4が同期する。以上のように、この現象では同期状態が時間とともに変化し続ける。次に、さらに  $\varepsilon$  を増やしていくと、リアプノフ指数0または負になる。 $\varepsilon$  が0.05から0.08の間では同期状態の共存現象が観測される。同期の共存現象については次章で述べる。次に、さらに  $\varepsilon$  を増やしていくと、リアプノフ指数が再び正になる。 $\varepsilon = 0.160$  のとき、図4(c)のように4つのうち3つのカオス写像の同期が観測された。最後に、 $\varepsilon$  が0.200を超えると、図4(d)のように全てのカオス写像が同期する。

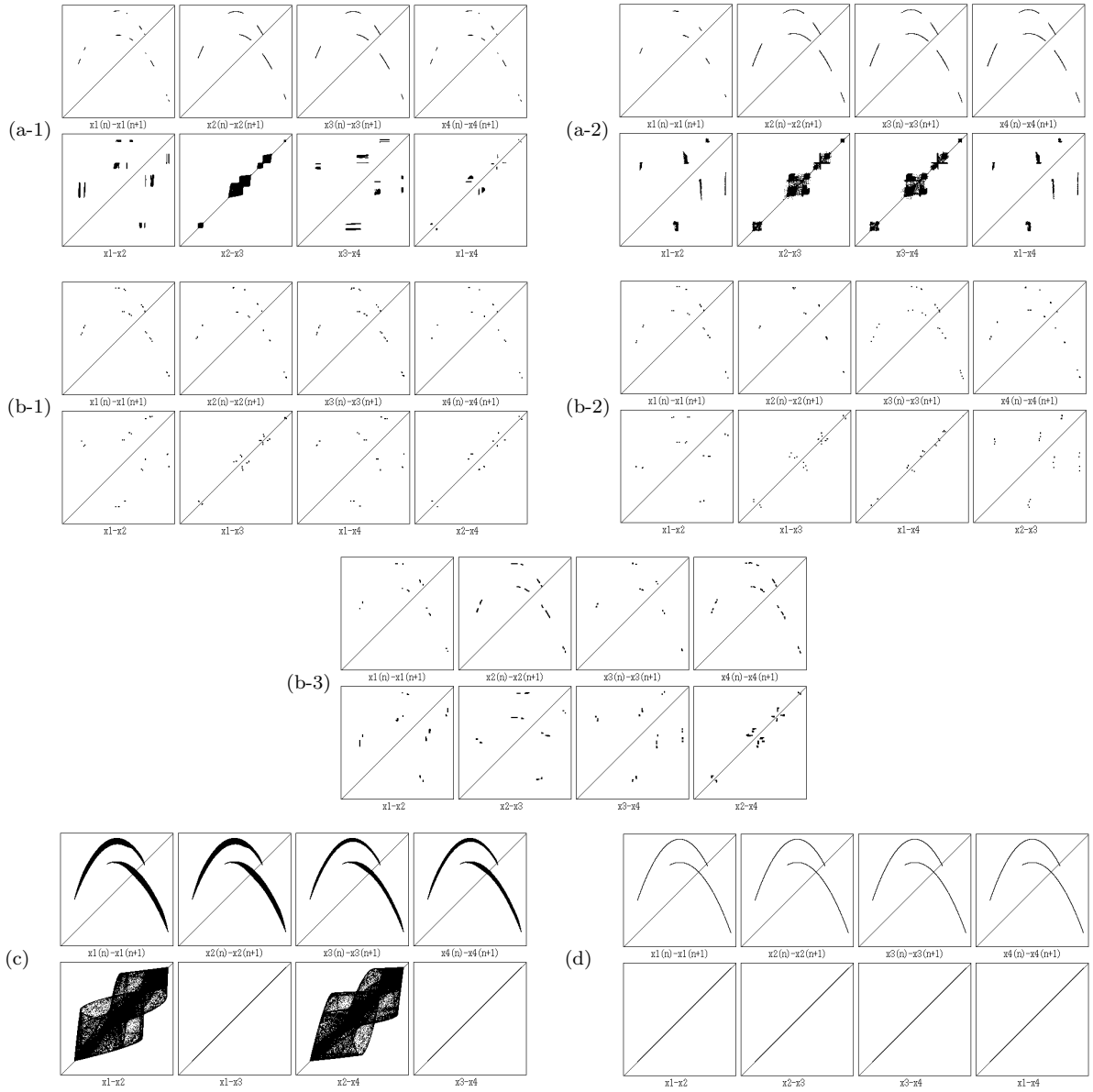


図 4 4つのパラメータ強制ロジスティック写像の広域結合系にみられる同期現象。 $\alpha_1 = 3.0$ 、 $\alpha_2 = 3.83$ 。(a)  $\varepsilon = 0.050$ 。(b)  $\varepsilon = 0.052$ 。(c)  $\varepsilon = 0.160$ 。(d)  $\varepsilon = 0.200$ 。

#### 4. 同期状態の共存現象

$\varepsilon$  が 0.05 から 0.08 の間では、一つの  $\varepsilon$  の値に複数のリアプノフ指数が見える部分がある。これは、その領域では同期状態が多安定であることを示している。 $\varepsilon$  を変化させることによって図 4(a-1) と (a-2) のような様々な同期状態の共存現象が観測される。図 4(a-1) では 2 組のカオス写像の同期がみられる。また、図 4(a-2) では、4 つのうち 3 つのカオス写像が同期している。どちらの同期状態になるかは初期値に依存する。多安定領域では、以下のような同期状態の共存現象が確認されている、

- 4 つのうち 2 つのカオス写像の同期、2 組の周期的な写像の同期、4 つのうち 3 つの周期的な写像の同期、の 3 種類の同期状態の共存現象 (図 4(b))、
- 2 組の周期的な写像の同期、2 つの周期的な写像が同期し、他の 2 つの周期的な写像が準同期する同期状態、の 2 種類の同期状態の共存現象、

- 4 つのうち 2 つのカオス写像の同期、2 組のカオス写像の同期、の 2 種類の同期状態の共存現象。

#### 5. $\alpha_f(n)$ に対する共存現象の発生領域

ここでは共存現象が発生する  $\alpha_f(n)$  の組み合わせについて調査する。図 5 は結合強度  $\varepsilon$  を固定し、横軸に  $\alpha_2$ 、縦軸に  $\alpha_1$  をとった 2 次元分岐図である。それぞれの図の上に記した数字がそれに対応する色の領域で観測されるアトラクタの周期である。また、黒色の領域は周期が 15 以上またはカオスが観測される領域である。ここで、 $\alpha_1 = \alpha_2$  の線に対称でないところ、色の境界が滑らかでないところでは、系は多安定となり、同期状態の共存現象がみられる。 $\varepsilon$  を変化させることで、異なる  $\alpha_f(n)$  の組み合わせの領域で同期状態の共存現象が確認される。

#### 6. むすび

本研究では、パラメータ強制を含む 4 つのロジスティック写

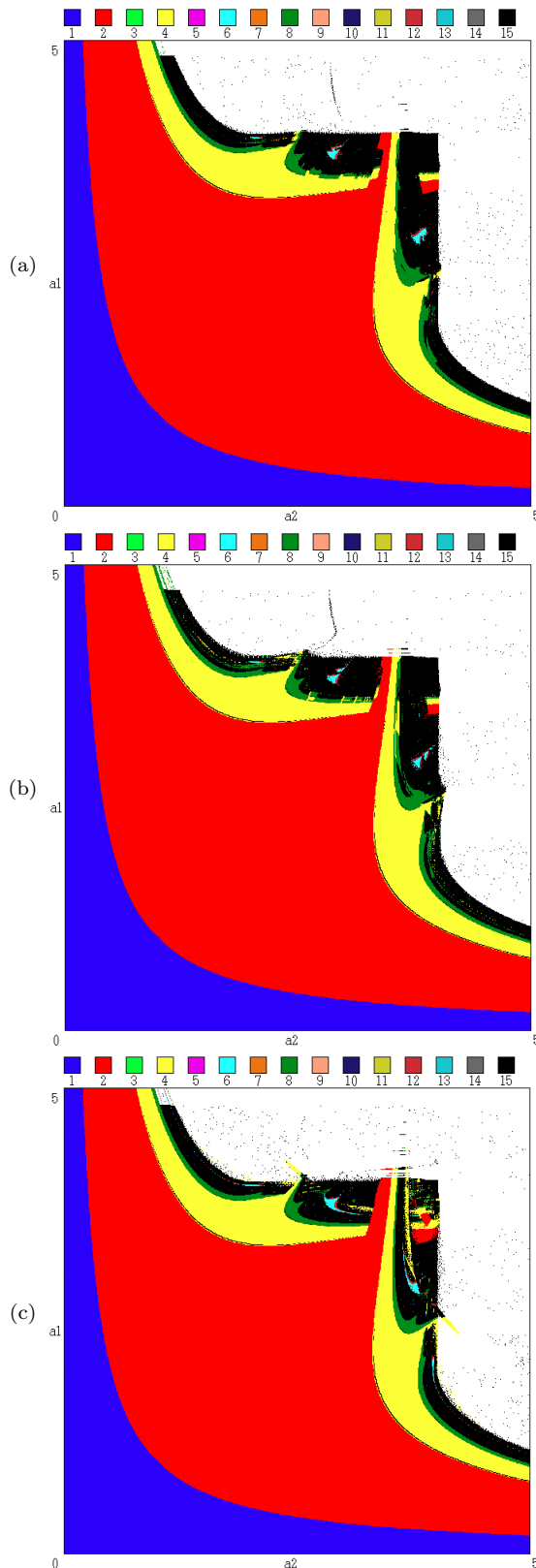


図5 2次元分岐図。(a)  $\varepsilon = 0.050$ . (b)  $\varepsilon = 0.080$ . (c)  $\varepsilon = 0.200$ .  
横軸:  $\alpha_2$ . 縦軸:  $\alpha_1$ .

像の広域結合系に発生する同期現象について調査した。このシステムにおいて、4つの内の全ての写像の同期、4つの内1つの写像以外の同期、同期のスイッチング現象、同期の共存現象などの様々な同期現象が確認された。特に同期状態の共存現象について調査した結果、様々な同期状態の組み合わせが共存し

ていることが確認され、また、パラメータ領域において、共存現象が確認される範囲についても調査された。

## 謝 辞

本研究の一部は、日本学術振興会の科学研究費補助金(22500203)により得られた成果である。

## 文 献

- [1] I. Belykh, M. Hasler, M. Lauret and H. Nijmeijer, "Synchronization and Graph Topology," Int. J. Bifurcation and Chaos, vol.15, no. 11, pp.3423-3433, Nov. 2005.
- [2] J. Cosp, J. Madrenas, E. Alarcon, E. Vidal and G. Villar, "Synchronization of Nonlinear Electronic Oscillators for Neural Computation," IEEE Trans. Neural Networks, vol. 15, no. 5, pp. 1315-1327, Sep. 2004.
- [3] C. Hayashi, Nonlinear Oscillations in Physical Systems, Chap. 11, McGraw-Hill, New York 1964.
- [4] C. Hayashi, M. Abe, K. Oshima and H. Kawakami, "The Method of Mapping as Applied to the Solution for Certain Types of Nonlinear Differential Equations," Proc. of the Ninth International Conference on Nonlinear Oscillations, pp. 1-8, 1981.
- [5] M. Inoue, "A Method of Analysis for the Bifurcation of the Almost Periodic Oscillation and the Generation of Chaos in a Parametric Excitation Circuit," Trans. of IEICE, vol. J68-A, no. 7, pp. 621-626, 1985.
- [6] K. Kaneko, "Spatiotemporal Intermittency in Coupled Map Lattice," Progress of Theoretical Physics, vol. 74, no. 5, pp. 1033-1044, Nov. 1985.
- [7] K. Kaneko, "Pattern Dynamics in Spatiotemporal Chaos," Physica D, vol. 34, nos. 1-2, pp. 1-41, Jan. 1989.
- [8] K. Kaneko, "Clustering, Coding, Switching, Hierarchical Ordering, and Control in a Network of Chaotic Elements," Physica D, vol. 41, no. 2, pp. 137-172, Mar. 1990.
- [9] H. Kumeno and Y. Nishio, "Synchronization Phenomena in Coupled Parametrically Excited van der Pol Oscillators," Proc. of International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA' 08), pp. 128-131, Sep. 2008
- [10] H. Kumeno and Y. Nishio, "Globally Coupled Parametrically Forced Logistic Maps," Proc. of Asia Pacific Conference on Postgraduate Research in Microelectronics and Electronics (PrimeAsia'09), pp. 181-184, Nov. 2009.