

SPICE を用いた Floquet の定理による周期解の安定判別

片岡 大茂[†] 山上 喜廣[†] 西尾 芳文[†] 牛田 明夫[†]

[†] 徳島大学

〒 770-8506 徳島県徳島市南常三島町 2-1

E-mail: †{hiroshige,yamagami,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

あらまし 回路設計において、安定判別は重要である。特に強非線形回路においては常に考慮すべきテーマである。今回提案する手法は、Floquet の定理を SPICE に応用した周波数応答における安定判別を行うアルゴリズムである。詳しくは、SPICE によって求めた周期解からヤコビ行列を求め、その固有値から安定判別を行う。最後に例として、非線形キャパシタを含んだ 2 次の共振回路の安定判別を行う。なお、このアルゴリズムでは Floquet の定理の他に調波平衡法を基にした Sine-Cosine 回路、弧長法を基にした解曲線追跡回路を用いる。

キーワード Floquet の定理, SPICE, 調波平衡法

SPICE-Oriented Algorithm for Assessment of Stability of Periodic Solutions

Hiroshige KATAOKA[†], Yoshihiro YAMAGAMI[†], Yoshifumi NISHIO[†], and Akio USHIDA[†]

[†] Dept. of E.E. Eng., Tokushima University, 2-1 Minami-Josanjima, Tokushima 770-8506, JAPAN

E-mail: †{hiroshige,yamagami,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

Abstract The assessment of the stability for periodic solutions is very important for designing the circuit. There are many method for the assessment of the stability. In this article, we propose a SPICE-oriented method for the assessment of the stability, that is based on the Floquet theory. By using our method, we can assess the stability of the circuit easily. First, we obtain the periodic solutions of the circuit by using the SPICE. Next, we calculate the eigenvalues of a Jacobian matrix by solving variational circuits based on the Floquet theory. As an example, we assess the stability of the periodic solutions for second order resonance circuit including nonlinear capacitors.

Key words Floquet theory, SPICE, harmonic balance method

1. ま え が き

本研究では、Floquet の定理 [1] を SPICE に応用した周波数応答における安定判別を行うアルゴリズムを提案する。従来は変分方程式から周期解を導出し、そのヤコビ行列の固有値を求め、安定判別を行っていた。それに対し、本研究では SPICE を用いて変分回路から周期解を求め、そのヤコビ行列の固有値から安定判別を行う。2.1 章では調波平衡法を基に考案された sine-cosine 回路 [2] について説明する。今回、sine-cosine 回路は変分回路を作成するにあたり必要となるパラメータを導出するために使用する。2.2 章では弧長法 [3][4] を基に考案された解曲線追跡回路について説明する。この解曲線追跡回路を使用することにより、非線形回路に見られる特殊な周波数特性の解析を行うことができる。2.3 章では今回の提案手法の基である Floquet の定理について説明し、第 3 章では例題回路として 2

次の非線形共振回路の安定判別を行う。

2. SPICE による周波数解析と安定判別

2.1 Sine-cosine 回路

ここでは調波平衡法の決定方程式から考案された sine-cosine 回路について説明する。電圧、電流をフーリエ級数で表すと次のようになる。

$$\begin{cases} v = V_0 + \sum_{k=1}^n (V_{CS_k} \sin k\omega t + V_{CC_k} \cos k\omega t) \\ i = I_0 + \sum_{k=1}^n (I_{CS_k} \sin k\omega t + I_{CC_k} \cos k\omega t) \end{cases} \quad (1)$$

また、キャパシタ、インダクタに関して次の関係式が成り立つ。

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}, v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (2)$$

式 (1)、式 (2) からキャパシタの特性に関して、

$$i_C = \sum_{k=1}^n (-k\omega CV_{CC_k} \sin k\omega t + k\omega CV_{CS_k} \cos k\omega t) \quad (3)$$

が成り立つ。ここで着目するのは電圧・電流それぞれの sine 成分、cosine 成分にかかる各係数である。式 (3) について、電流における cosine 成分の係数は電圧における sine 成分の係数に依存することが分かる。また、電流の sine 成分は、電圧の cosine 成分に依存することが分かる。

同様に、インダクタの特性から

$$v_L = \sum_{k=1}^n (-k\omega LI_{CC_k} \sin k\omega t + k\omega LI_{CS_k} \cos k\omega t) \quad (4)$$

が成り立つ。以上のことから、図 1 のような RLC 回路を sine-cosine 回路 (各素子における sine 成分、cosine 成分の係数変化に着目した回路) に置き換えると図 2 が得られる。

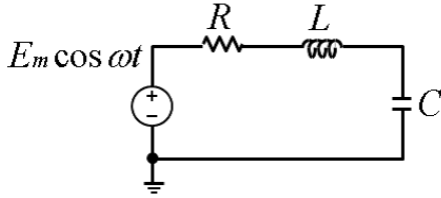


図 1 RLC 回路

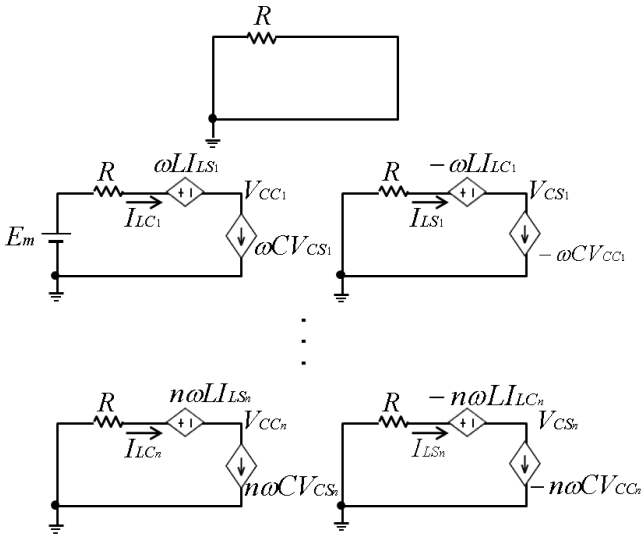


図 2 図 1 の回路より得られる sine-cosine 回路

2.2 解曲線追跡回路

我々のアルゴリズムで解析を行う際、解曲線追跡回路を利用する。解曲線追跡回路は弧長法を基に提案された回路である。(n+1) 次元のユークリッド空間 x において、微小変化は式 (5) で表すことができる。

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + \dots + (dx_{(n+1)})^2} \quad (5)$$

ここで弧長 s を時間変数 t 、各 x 成分を電圧と仮定すると式 (6)

が得られ、図 3 の回路で表すことができる。

$$\sum_{i=1}^p \left(\frac{dv_i}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv_\omega}{ds} \right)^2 = 1 \quad (6)$$

式 (6) において $v_i (i = 1, 2, \dots, p)$ 、 v_ω は、それぞれ式 (5) の $v_x (x = 1, 2, \dots, n)$ 、 $v_x (x = n + 1)$ に対応する。図 3 において、入力は電圧制御電流源 (VCCS) によって決定される。

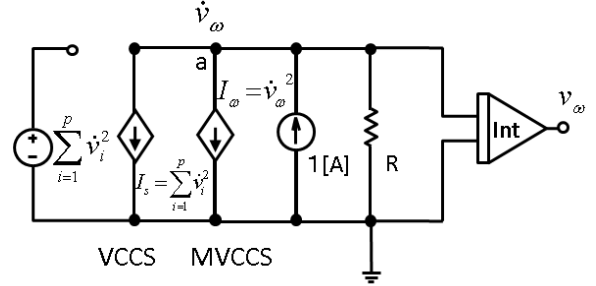


図 3 解曲線追跡回路

2.3 周期解の安定性

式 (7) のような微分代数方程式を考える。

$$f(\dot{x}, x, y, \omega t) = 0 \quad (7)$$

ここで、定常周期解 \hat{x} 、 \hat{y} に対し、微小変分量 ($\Delta x, \Delta y$) を与え、変分方程式を導出する。すなわち、

$$\begin{cases} x = \hat{x} + \Delta x \\ y = \hat{y} + \Delta y \end{cases} \quad (8)$$

を式 (9) に代入し、

$$f(\dot{x}, \hat{x}, \hat{y}, \omega t) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \Big|_{x=\hat{x}, y=\hat{y}} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

が得られる。 \hat{x}, \hat{y} は定常周期解のため、式 (9) における第 1 項目は零である。よって、第 2 項目の変形から

$$\dot{\Delta x} = A(t)\Delta x \quad (10)$$

が得られる。ここで、 $A(t)$ は周期が $T = 2\pi/\omega$ の周期関数であり、この系に対し、Floquet の定理を適用する。つまり、上式の基本行列解を $\Phi(t)$ とすると、任意の初期値 $\Delta x(0)$ に対する 1 周期後の解は

$$\Delta x(T) = \Phi(T)\Delta x(0) \quad (11)$$

となり、 $\Phi(T)$ の固有値 ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$) が $|\lambda_k| < 1 (k = 1, 2, \dots, n)$ を満たすときに定常周期解は安定であり、安定判別を行うことができる。

4. シミュレーション結果

図 7、8、9 は i_1 、 i_2 、 i_3 (q_1 、 q_2 は比較対象とする [4] に示されていないので省略する) に対して、SPICE で sine-cosine 回路と解曲線回路を用いて解析を行った結果である。シミュレ-

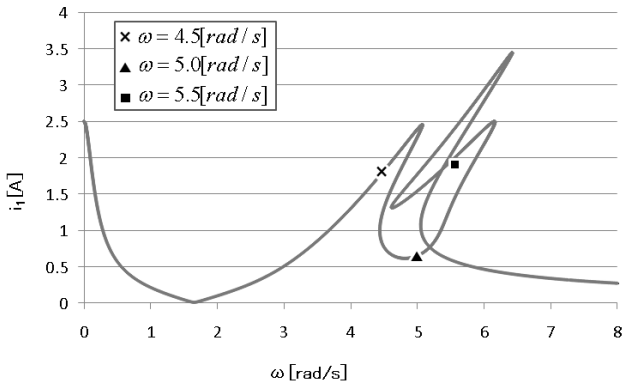


図 7 i_1 の周波数応答特性

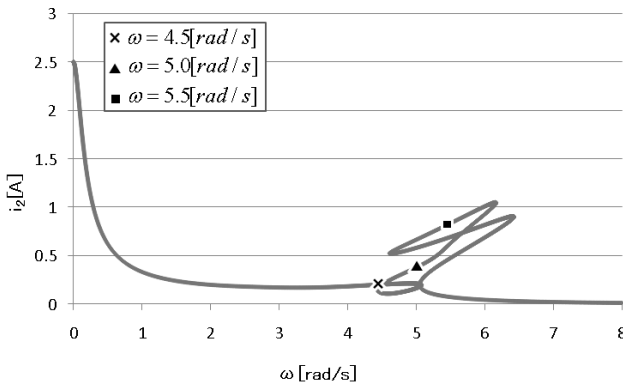


図 8 i_2 の周波数応答特性

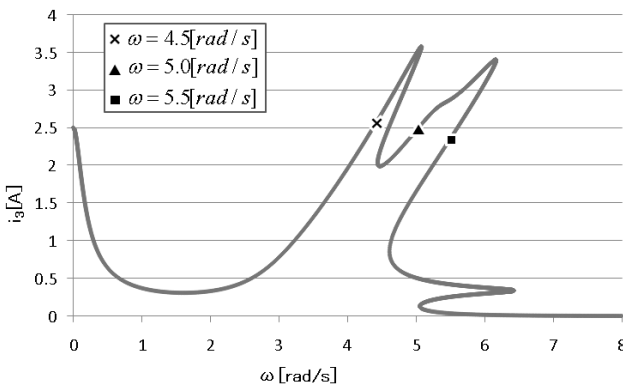


図 9 i_3 の周波数応答特性

シオンで用いた素子の各パラメータは次のとおりである。

$$E_m = 0.35[V], \alpha_1 = 2.4, \beta_1 = 12.0, \alpha_2 = 1.0, \beta_2 = 5.0, \\ R_1 = 0.1[\Omega], R_2 = R_3 = 0.02[\Omega], L_1 = 0.2[H], L_2 = 0.8[H], \\ L_3 = 0.10101[H]$$

我々は参考文献 [4] に対して同条件の回路をシミュレーションし、安定・不安定の両状態を含む波形を得た。この章では、我々の手法による結果と参考文献 [4] の結果を比較する。今回は図 7、8、9 上で示す $\omega = 4.5[\text{rad/sec}]$ 、 $\omega = 5.0[\text{rad/sec}]$ 、 $\omega = 5.5[\text{rad/sec}]$ の三点で安定判別を行った。まず、 $\omega = 4.5[\text{rad/sec}]$ の場合

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.123 & 0.255 & -0.767 & 0.145 & 0.124 \\ 1.034 & 0.449 & 0.990 & -0.134 & 0.116 \\ -0.314 & 0.102 & 0.636 & -0.030 & -0.235 \\ -0.673 & 0.208 & 0.160 & -0.204 & 0.235 \\ -0.222 & -0.132 & 1.334 & 0.138 & -0.202 \end{bmatrix}$$

となる。次に、 $\omega = 5.0[\text{rad/sec}]$ の場合

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.465 & 0.113 & 0.006 & -0.182 & -0.013 \\ 0.397 & 0.847 & -0.771 & 0.052 & 0.260 \\ 0.036 & -0.106 & 1.516 & 0.117 & -0.236 \\ 0.912 & 0.008 & -1.700 & 0.200 & 0.140 \\ 0.238 & -0.279 & 1.699 & 0.002 & -0.070 \end{bmatrix}$$

となる。最後に $\omega = 5.5[\text{rad/sec}]$ の場合

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.399 & -0.075 & -0.590 & 0.164 & -0.060 \\ -0.099 & 0.988 & -0.597 & -0.213 & 0.297 \\ -0.470 & -0.035 & 2.032 & 0.034 & -0.225 \\ -0.929 & 0.452 & -1.380 & -0.022 & 0.232 \\ 0.779 & -0.136 & -0.531 & 0.061 & 0.182 \end{bmatrix}$$

となる。これらの行列式の固有値を求め、まとめたものが表 1 である。表 1 から $\omega = 4.5[\text{rad/s}]$ のとき、すべての λ に対し

表 1 Φ の固有値

ω [rad/s]	$ \lambda_1 $	$ \lambda_2 $	$ \lambda_3 $	$ \lambda_4 $	$ \lambda_5 $
$\omega = 4.50$	0.610	0.610	0.564	0.564	0.853
$\omega = 5.00$	0.530	0.530	0.405	0.851	1.043
$\omega = 5.50$	2.411	0.866	0.593	0.593	0.149

$|\lambda| < 1$ なので安定である。しかし、 $\omega = 5.00$ と $\omega = 5.50$ のとき、 $|\lambda| < 1$ を満たさない固有値があるので不安定であるといえる。この結果から、我々が提案した単純な SPICE のアルゴリズムで参考文献 [4] と等しい結果が得られたことが分かる。

5. まとめ

本研究では、Floquet の定理を SPICE に応用した周波数応答における安定判別を行うアルゴリズムを提案した。安定判別法として Floquet の定理を用いる際、周期解を単純な SPICE のアルゴリズムで直接求めることにより安定判別を簡略化できたと考えられる。非線形キャパシタを含む 2 次の共振回路におけるいくつかの ω に対し我々の提案手法で安定判別を行い、従来の手法を用いた結果と一致することを確認した。今後の課題は、回路の大規模化に対して我々の手法を効果的に適用することである。

謝 辞

本研究の一部は、日本学術振興会の科学研究費補助金(22500203)により得られた成果である。

文 献

- [1] F.L. Traversa, F. Bonani and S.D. Guerrieri, “A frequency-domain approach to the analysis of stability and bifurcations in nonlinear systems described by differential-algebraic equations,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol.36, pp.421-439, 2008.
- [2] T. Kinouchi, Y. Yamagami, Y. Nishio and A. Ushida, “Spice-oriented harmonic balance Volterra series methods,” *Proc. of NOLTA'07*, pp.513-516, 2007.
- [3] Y. Inoue, “DC analysis of nonlinear circuits using solution-tracing circuits,” *Trans. IEICE*, vol.J74-A, pp.1647-1655, 1991.
- [4] E. Ikeno and A. Ushida, “The arc-length method for the computation of characteristic curves,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.23, pp.181-183, 1976.