

結合三角形型発振器ネットワークで観測される同期現象 Synchronization in Coupled Triangle Oscillatory Networks

上手 洋子[†] 西尾 芳文[‡] ルディ ストープ[†]
[†]ニューロインフォマティクス研究所，チューリッヒ大学・ETH チューリッヒ
[‡]徳島大学 工学部 電気電子工学科

Yoko UWATE[†] Yoshifumi NISHIO[‡] Ruedi STOOP[†]
[†]Institute of Neuro Informatics, University/ETH Zurich
[‡]Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Tokushima University

1 はじめに

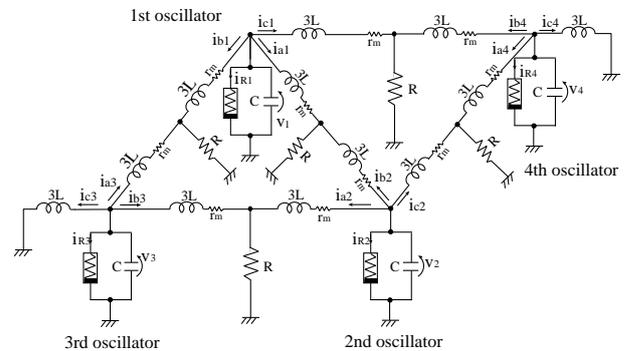
結合発振器は，実物理システムで観測される高次の非線形現象を説明する優れたモデルである．非線形発振回路としてよく知られている van der Pol 発振器は，オランダの物理学者 Balthasar van der Pol によって発見され [1]，発振器を複数個結合したシステムにみられる同期現象についてこれまで数多くの研究が行われている．遠藤らは，van der Pol 発振器を梯子状，環状，二次元配列状に結合した系の理論解析と回路実験結果を報告している [2]-[4]．また，結合発振器は，位相伝搬波やクラスタリングなどといった興味深い位相同期パターンを生み出すことも知られており [5]-[8]，この位相同期パターンを連想記憶や学習過程といった脳の情報処理モデリングに応用できるのではないかと期待されている．

また，自然界には蜂の巣構造で有名なハニカム構造や結晶構造など様々なタイプのネットワーク構造が存在する．しかし，発振器の大規模結合系の研究としては，環状や二次元格子状のモデルが多く，多角形が結合されたネットワークトポロジーについての研究はこれまであまり報告されていない．我々は，発振器をより複雑なネットワーク構造に応用することで，それぞれのネットワーク構造が持つ新しい特徴を見出すことができるのではないかと考える．

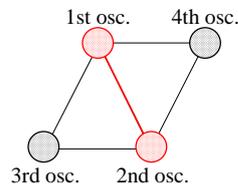
本研究では，多角形が結合された大規模ネットワーク研究の第一段階として，二つの三角形型 van der Pol 発振器ネットワークの一边を介して結合したシステムで観測される同期現象についてコンピュータシミュレーションおよび理論解析によって調査を行う．さらに，結合抵抗部分の消費電力を求め，同期現象とエネルギーの関係を明らかにする．

2 回路モデル

図 1 に二つの三角形型発振器ネットワークを結合した回路モデルを示す．隣接する発振器の結合方法は，発振器のコイルを介して接地された抵抗につながるものとする．本結合方法を適用した場合，4 番目の発振器が結合されていない一つの三角形型発振器ネットワークは三相同期（隣接する発振器間の位相差が $2\pi/3$ で同期）することが知られている．



(a) 二つの三角形型発振器ネットワークを結合した回路図．



(b) 回路モデルの概念図．

図 1: 回路モデル．

この回路において非線形抵抗の $v_k - i_{Rk}$ 特性は式 (1) に示すような 3 次特性の多項式で近似される．

$$i_{Rk} = -g_1 v_k + g_3 v_k^3 \quad (g_1, g_3 > 0), \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

正規化後の回路方程式は次のようになる．

[First oscillator]

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{3}x_1^2\right)x_1 - (y_{a1} + y_{b1} + y_{c1}) \\ \frac{dy_{a1}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_1 - \eta y_{a1} - \gamma(y_{a1} + y_{b2})\right\} \\ \frac{dy_{b1}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_1 - \eta y_{b1} - \gamma(y_{a3} + y_{b1})\right\} \\ \frac{dy_{c1}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_1 - \eta y_{c1} - \gamma(y_{b4} + y_{c1})\right\} \end{cases} \quad (2)$$

[Second oscillator]

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{d\tau} = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{3}x_2^2\right)x_2 - (y_{a2} + y_{b2} + y_{c2}) \\ \frac{dy_{a2}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_2 - \eta y_{a2} - \gamma(y_{a2} + y_{b3})\right\} \\ \frac{dy_{b2}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_2 - \eta y_{b2} - \gamma(y_{a1} + y_{b2})\right\} \\ \frac{dy_{c2}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_2 - \eta y_{c2} - \gamma(y_{a4} + y_{c2})\right\} \end{cases} \quad (3)$$

[Third oscillator]

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{d\tau} = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{3}x_3^2\right)x_3 - (y_{a3} + y_{b3} + y_{c3}) \\ \frac{dy_{a3}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_3 - \eta y_{a3} - \gamma(y_{a3} + y_{b1})\right\} \\ \frac{dy_{b3}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_3 - \eta y_{b3} - \gamma(y_{a2} + y_{b3})\right\} \\ \frac{dy_{c3}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_3 - \eta y_{c3}\right\} \end{cases} \quad (4)$$

[Fourth oscillator]

$$\begin{cases} \frac{dx_4}{d\tau} = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{3}x_4^2\right)x_4 - (y_{a4} + y_{b4} + y_{c4}) \\ \frac{dy_{a4}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_4 - \eta y_{a4} - \gamma(y_{a4} + y_{c2})\right\} \\ \frac{dy_{b4}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_4 - \eta y_{b4} - \gamma(y_{b4} + y_{c1})\right\} \\ \frac{dy_{c4}}{d\tau} = \frac{1}{3} \left\{x_4 - \eta y_{c4}\right\} \end{cases} \quad (5)$$

ここで，変数変換とパラメータは下式に示す．

$$t = \sqrt{LC}\tau, \quad v_k = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}}x_k,$$

$$i_{ak} = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}}\sqrt{\frac{C}{L}}y_{ak}, \quad i_{bk} = \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}}\sqrt{\frac{C}{L}}y_{bk},$$

$$\varepsilon = g_1\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = R\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \eta = r_m\sqrt{\frac{C}{L}},$$

$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

この回路方程式において， γ は結合係数， ε は発振器の非線形性を表すパラメータである．シミュレーションによる調査では，式 (2) を 4 次のルンゲ=クッタ法 (ステップサイズ: $h = 0.005$) で解く．また各パラメータは， $\varepsilon = 0.1$ ， $\gamma = 0.1$ ， $\eta = 0.0001$ のように設定した．

3 同期現象

図 2 に，各 van der Pol 発振器のキャパシタ電圧に対応する時間波形を示す．この図より，1 番目と 2 番目の発振器が同相 (位相差が 0 度) で同期し，その他の発振器間は逆相 (位相差が 180 度) で同期していることがわかる．また，波形の振幅が 1, 2 番目の発振器と 3, 4 番目の発振器では異なっている．各発振器間の位相平面の様子を図 3 に示す．

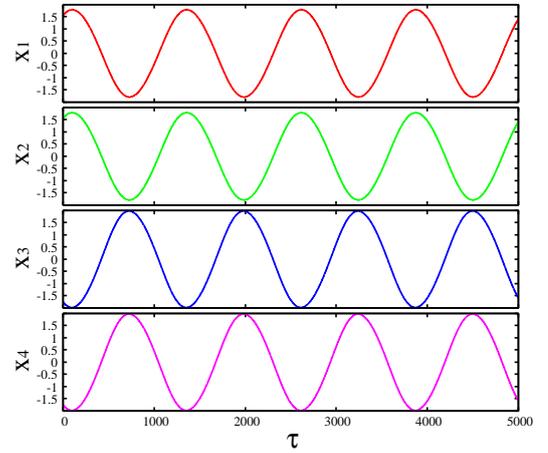


図 2: 各発振器のキャパシタ電圧の時間波形．

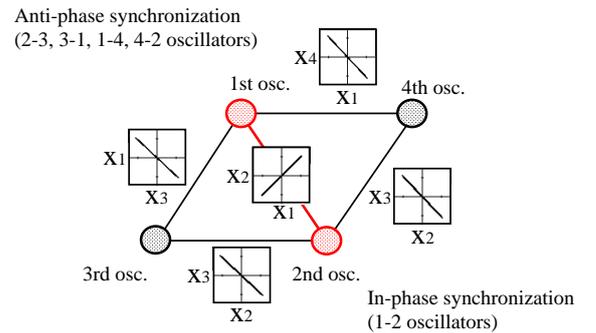


図 3: 各発振器間の位相平面図．

4 理論的解析

本節では，平均化法を図 1 の回路モデルより得られる式 (2)-(5) に適応した場合について説明する．ここでは，簡略化のために回路モデルの微小抵抗 r_m を

無視した ($\eta = 0$) 場合を考える．まず，式 (2) を 2 階の非線形微分方程式で表すと以下ようになる．

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = \varepsilon(1 - x_1^2)\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{1}{3}\gamma Y_1 \equiv F_1 \quad (6)$$

$$\frac{dY_1}{d\tau} + \frac{2}{3}\gamma Y_1 = x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \quad (7)$$

ここで，

$$Y_1 \equiv y_{a1} + y_{a3} + y_{b1} + y_{b2} + y_{b4} + y_{c1}.$$

式 (7) は 1 階の線形微分方程式なので解が以下のように求まる．

$$Y_1 = e^{-\frac{2}{3}\gamma\tau} \int e^{\frac{2}{3}\gamma\tau} \left(x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \right) d\tau + C e^{-\frac{2}{3}\gamma\tau} \quad (8)$$

ここで式 (8) の第二項は定常状態では 0 になる．

次に，式 (6) の解を

$$x_k(\tau) = \rho_k \sin(\tau + \theta_k). \quad (9)$$

とおくと，平均化法により ρ_1, θ_1 が次のように与えられる．

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \varepsilon F_1 \cos(\tau + \theta_1) d\tau \\ \dot{\theta}_1 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\varepsilon}{\rho_1} F_1 \sin(\tau + \theta_k) d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

上式を計算することで以下の式 (11), (12) が得られる．

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -\frac{\varepsilon^2 \rho_k}{8} (\rho_k^2 - 4) \\ &\quad - \frac{\varepsilon \gamma}{3(4\gamma^2 + 9)} \left\{ 9\rho_1 + 2\gamma\rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right. \\ &\quad - 3\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2\gamma\rho_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ &\quad - 3\rho_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2\gamma\rho_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) \\ &\quad \left. - 3\rho_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\frac{\varepsilon \gamma}{3\rho_k(4\gamma^2 + 9)} \left\{ 6\gamma\rho_1 + 2\gamma\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right. \\ &\quad - 3\rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\gamma\rho_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ &\quad - 3\rho_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + 2\gamma\rho_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) \\ &\quad \left. - 3\rho_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

式 (3)-(5) にも同様に平均化法を適用し，定常状態においては，

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_k &= 0 \quad \text{and} \quad \dot{\theta}_k = 0 \quad (13) \\ &\quad (k = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

が成り立つことから各発振器の解が次のように得られる．

振幅：

$$\rho_k = \sqrt{4 - \frac{8\gamma}{3\varepsilon(4\gamma^2 + 9)}} \quad (14)$$

($k = 1, 2$).

$$\rho_k = 2 \quad (15)$$

$$(k = 3, 4).$$

位相差：

$$\theta_1 - \theta_2 = 0. \quad (16)$$

$$\theta_3 - \theta_2 = \theta_3 - \theta_4 = \theta_4 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_2 = \pi. \quad (17)$$

平均化法による位相差の値は，1 番目と 2 番目の発振器間が同相同期し，その他の発振器間は逆相で同期していることを表しており，シミュレーションの結果とも一致する．次に，式 (14) にシミュレーションで用いたパラメータ ($\varepsilon = 0.1, \gamma = 0.1$) を代入して振幅の理論値を求める．表 1 に振幅の理論値とシミュレーション結果の比較を示す．表より，振幅の値が理論値とシミュレーション値でよく似た値をとっており，平均化法の近似が妥当であるといえる．

表 1: 理論値とシミュレーション結果の比較 (振幅) .

	理論値	シミュレーション
ρ_1, ρ_2	1.765	1.790
ρ_3, ρ_4	2.000	1.979

5 結合係数を変化させたときの同期現象

最後に，二つの三角形発振器ネットワークの共有辺にある 1 番目と 2 番目の発振器間の結合係数の大きさを変化させたときの位相差と，結合抵抗での消費電力についてコンピュータシミュレーションによる調査を行う．まず，結合係数の大きさを変えるパラメータ β を導入する．この β を 1 番目と 2 番目の発振器間の結合係数 γ に掛けることで結合係数の大

きさを変化させる．図 4 に位相差のシミュレーション結果を示す． β の値が 1 より小さいときは，位相差が 0 度なので，1 番目と 2 番目の発振器は同相で同期し， β の値が 1 を越えると，徐々に位相差が大きくなり， $\beta = 2$ のところで，位相差が 120 度となっており二つの三角形型発振器ネットワークが三相同期していることがわかる．

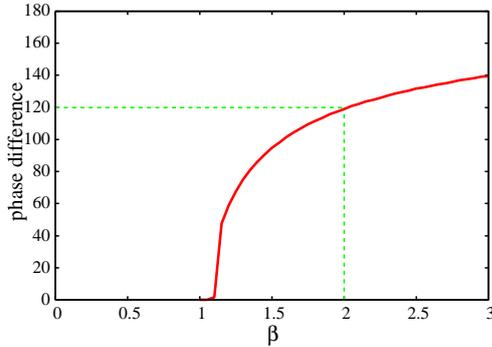


図 4: 位相差 ($\theta_1 - \theta_2$)

次に，結合抵抗で消費される電力について議論する．消費電力は以下の式によって定義される．

$$\begin{aligned}
 P_{12} &= \frac{1}{T_p} \sum_{\tau=1}^{T_p} \gamma (y_{a1} + y_{b2})^2 \\
 P_{23} &= \frac{1}{T_p} \sum_{\tau=1}^{T_p} \gamma (y_{a2} + y_{b3})^2 \\
 P_{31} &= \frac{1}{T_p} \sum_{\tau=1}^{T_p} \gamma (y_{a3} + y_{b1})^2 \\
 P_{41} &= \frac{1}{T_p} \sum_{\tau=1}^{T_p} \gamma (y_{b4} + y_{c1})^2 \\
 P_{42} &= \frac{1}{T_p} \sum_{\tau=1}^{T_p} \gamma (y_{a4} + y_{c2})^2 \\
 P_{All} &= P_{12} + P_{23} + P_{31} + P_{41} + P_{42}
 \end{aligned} \tag{18}$$

ここで， T_p は十分に長い周期として $T_p = 100,000$ に設定した．

結合抵抗部分における消費電力のシミュレーション結果を図 5 に示す．可変にしている 1 番目と 2 番目を結合抵抗での消費電力 P_{12} は， β の増加とともに大きくなり， $\beta = 1$ 付近，すなわちその他の結合抵抗と同じ値のときには，消費電力が最も大きくピーク値をとっていることがわかる．その他の結合抵抗での消費電力は， $\beta < 1$ のときには，ほぼ 0 で， β が 1 を越えると徐々に大きくなっている．また，回路全体の消費電力は， β の増加とともに増えているのがわかる．

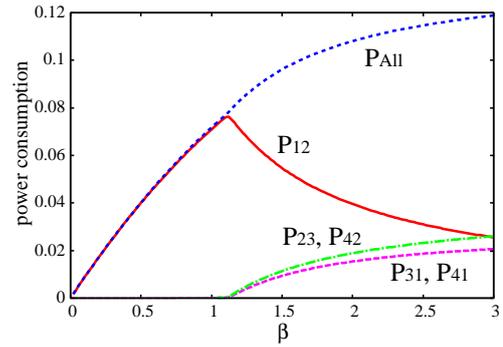


図 5: 結合抵抗部分の消費電力．

6 まとめと今後の課題

本研究では，多角形が結合された大規模ネットワーク研究の第一段階として，二つの三角形型 van der Pol 発振器ネットワークの一辺を介して結合したシステムで観測される同期現象についてコンピュータシミュレーションおよび理論解析によって調査を行った．さらに，結合抵抗部分の消費電力を求め，同期現象とエネルギーの関係を明らかにした．

平均化法を用いた理論解析において，解の安定性について調査すること，またネットワークを大規模化したときの同期現象についての特徴について議論することが今後の課題である．

参考文献

- [1] Van der Pol, B. and van der Mark, J., “Frequency demultiplication” *Nature*, 120, pp. 363-364, 1927.
- [2] T. Endo and S. Mori, “Mode analysis of a multimode ladder oscillator,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.23, pp.100-113, Feb. 1976.
- [3] T. Endo and S. Mori, “Mode analysis of two-dimensional low-pass multimode oscillator,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.23, pp.517-530, Sep. 1976.
- [4] T. Endo and S. Mori, “Mode analysis of a ring of a large number of mutually coupled van der Pol oscillators,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.25, no.1, pp.7-18, Jan. 1978.
- [5] Y. Nishio and S. Mori, “Mutually coupled oscillators with an extremely large number of steady states,” *Proc. of ISCAS’92*, vol.2, pp.819-822, May 1992.
- [6] L. Pivka, “Autowaves and spatio-temporal chaos in CNNs Part I: A tutorial,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol.42, pp.638-649, Oct. 1995.
- [7] M. Yamauchi, Y. Nishio and A. Ushida, “Phase-waves in a ladder of oscillators” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E86-A, no.4, pp.891-899, Apr. 2003.
- [8] Y. Uwate and Y. Nishio, “Complex Phase Synchronization in an Array of Oscillators Coupled by Time-Varying Resistor,” *Proc. of IJCNN’06*, pp. 8345-8350, Jul. 2006.