

MATLAB と SPICE を併用した変調回路の周波数領域での解法

ボルテラ級数展開法と調波平衡法

河田 淳治[†] 山上 喜広^{††} 西尾 芳文^{††} 牛田 明夫[†]

[†] 徳島文理大学 工学部
香川県さぬき市志度 1314-1
^{††} 徳島大学 工学部
徳島県徳島市南常三島町 2-1

E-mail: [†]{kawata,ushida}@fe.bunri-u.ac.jp, ^{††}{yamagami,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

あらまし ボルテラ級数展開法は非線形回路の周波数領域での求解法であり、解が解析的な関数で与えられることから、RF 回路や通信回路の解析に広く用いられている。この手法は準線形理論に基づいており、弱非線形系に対してのみ有効である。しかしながら、その解の精度について定量的に議論した文献は見当たらない。一方、調波平衡法 (HB 法) は強非線形系にも適用できるが、一般的な電子回路を解析する場合 決定方程式が煩雑になるために 不向きであった。本稿では、HB 法に Spice と MATLAB を併用することによって、電子回路の周波数領域での解析を可能とした。変調回路の解析に対してボルテラ級数展開法と HB 法を適用し、解の精度について議論すると共に、応用例として 差動型ミキサ回路を解析する。

キーワード ボルテラ級数展開法, 調波平衡法, MATLAB, Spice, 変調回路, ミキサ回路

Spice-oriented frequency-domain intermodulation analysis combining with MATLAB

Comparisons between Volterra series and harmonic balance methods

Junji KAWATA[†], Yoshihiro YAMAGAMI^{††}, Yoshifumi NISHIO^{††}, and Akio USHIDA[†]

[†] Faculty of Eng., Tokushima Bunri University
1314-1 Shido, Sanuki, 769-2193 JAPAN

^{††} Faculty of Eng., Tokushima University
2-1 Minami-josanjima, Tokushima, 770-8506 JAPAN

E-mail: [†]{kawata,ushida}@fe.bunri-u.ac.jp, ^{††}{yamagami,nishio}@ee.tokushima-u.ac.jp

Abstract It is very important to analyze RF circuits, mixers and modulators driven by multiple input frequencies. Volterra series methods are widely used for the frequency-domain analysis of nonlinear circuits, because they give the solutions in analytical forms. On the other hand, HB (harmonic balance) method is well-known that can be applied even for relatively strong nonlinear circuits. In this article, we propose a Spice-oriented HB method combining with MATLAB. Firstly, for the nonlinear devices modeled by the special functions, their characteristics are approximated by the Taylor series, and the Fourier coefficients to the input and output relations can be calculated by MATLAB in the *symbolic forms*. Thus, *the determining equation* of HB method can be formulated by the equivalent circuit and/or net-list. It can be efficiently solved by the DC analysis of Spice. Thus, the frequency-domain solutions such as frequency response curves can be easily obtained by the DC sweep. We found from the examples that, although Volterra series method can be efficiently applied to weakly nonlinear circuits, it becomes erroneous for strong nonlinear circuits. On the other hand, our HB method can be stably applied to relatively strong nonlinear circuits.

Key words Volterra series method, harmonic balance method, MATLAB, Spice, modulator and mixer circuit

1. まえがき

非線形電子回路の周波数領域での求解において、周波数応答曲線を求めることは IC や通信回路を設計する上で重要である。ボルテラ級数展開法は解が解析的な関数で得られるためこのような目的に適しており、欧米を中心に広く用いられている [1-3]。この解析手法は準線形理論に基づいている。この手法では、非線形特性がべき級数で与えられる必要があり、弱非線形回路の解析に適していると云われている。ボルテラ核の計算は高次になると煩雑になるため、通常、3 次までのオーダが用いられている^(注1)。一方、調波平衡法 (HB) は古くから非線形振動の解析に広く用いられており、多くの興味ある非線形現象を解明してきた [5-8]。この解法は規模の大きい電子回路の解析に対しては、①決定方程式が煩雑になることと、②トランジスタなどのモデルが特殊関数を含んでいるために解析的にフーリエ級数展開ができない等の理由で、一般的な電子回路の解析には用いられなかった [9,10]。そのため反復解法に基づく数値的な手法が多く開発されている [11-14]。これらはある指定した入力に対して、正確な定常振動波形を求めることはできるが、周波数応答曲線のような大域的な特性解析には有効でない。そこで、我々は古典的な HB 法が任意の非線形素子をもつ回路に適用できるように、フーリエ変換器なるものを Spice の ABM (アナログビヘービア モデル) を用いて開発し、調波平衡法に基づく解析を可能にした [15-16]。しかしながらこの方法では、2 つの異なる周波数成分を持つ回路に対しては、フーリエ変換器の構成が煩雑となり、演算時間等の問題があることが分かった。そこで、本稿では、非線形特性をテラ級数で近似し、MATLAB を用いて入出力関係をシンボリックな形でフーリエ級数に展開し [17]、ネットリストとして調波成分ごとに Spice に取り込み、HB 法を用いて解析する手法を提案する。この HB 法では決定方程式がネットリストとして与えられ、Spice の直流解析で周波数応答曲線を容易に得ることができるため、記号解析と同様な性質を持っている。この場合、トランジスタなどをあらかじめモジュール化し、ライブラリに登録しておくことによって、容易に汎用化できる。

本解法の有効性を調べるために、ボルテラ級数法との精度の比較をベース変調回路について行った。応用例として、差動型のミキサ回路を解析した。いずれの回路に対しても周波数応答曲線が安定に追跡できることが分かった。なお、上述の各種解法の特長を比較したものが、付録にまとめられている。

2. ボルテラ級数展開法と調波平衡法の比較

2.1 非線形素子のテラ級数近似

ここでは、非線形素子をテラ級数によって近似するとき、何次のオーダまで採用すれば良いかについて考える。バイポーラトランジスタは 2 個のダイオードと従属電流源からなるエバース・モルモデルによってよくモデリングされるため、次のような特性 (i_d, v_d) を持つダイオードについて議論する。

$$i_d = I_S \exp v_d/V_T, \quad I_S = 10^{-12}[\text{A}], \quad V_T = 0.025. \quad (1)$$

まず最初に、 v_d を次のように仮定したとき

$$v_d = V_{d0} + V_d \cos \omega t, \quad \text{ただし } V_{d0} = 0.5822^{(\text{注2})} \quad (2)$$

応答 i_d を求めフーリエ級数に展開した直接法と、3 次のオーダのテラ級数で近似したときの応答の DC, $\cos \omega t$, $\cos 2\omega t$, $\cos 3\omega t$ 成分を比較してみよう。ただし

$$i_d = k_0 + k_1 v_d + k_2 v_d^2 + k_3 v_d^3, \quad (3)$$

$$k_0 = 0.0130, \quad k_1 = 0.5199, \quad k_2 = 10.39, \quad k_3 = 138.6$$

振幅 V_d をパラメータとして変化させた場合の結果が表 1 に示されている。

表 1 3 次のテラ級数と厳密解

V_d	厳密解				3 次テラ近似			
	直流	基本	2 倍	3 倍	直流	基本	2 倍	3 倍
0.02	0.0151	0.0113	0.0022	0.0003	0.0151	0.0112	0.0021	0.0003
0.05	0.0295	0.0413	0.0179	0.0055	0.0259	0.0390	0.0130	0.0043
0.07	0.0538	0.0859	0.0469	0.0191	0.0383	0.0720	0.0255	0.0119
0.10	0.1460	0.2542	0.1624	0.0870	0.0647	0.1560	0.0520	0.0347

表 1 より、入力振幅 V_d が小さい場合には誤差は小さいが、振幅の増加と共に急速に誤差が大きくなることが分かった。たとえば、 $V_d = 0.1$ に対する 3 次近似の基本調波の誤差は 63 パーセントである。そこで、精度を上げるために、テラ近似の次数を 5 次、7 次と上げたときの結果が表 2 に示されている。

表 2 テラ級数の次数と厳密解 ($V_d = 0.1$)

	直流成分	基本調波	2 倍調波	3 倍調波
厳密解	0.1459	0.2538	0.1670	0.0870
3 次近似	0.0646	0.1559	0.0519	0.0347
5 次近似	0.1162	0.2250	0.1216	0.0696
7 次近似	0.1397	0.2483	0.1559	0.0832

テラ級数の次数を上げるにより厳密解に近づいており、 $V_d = 0.1$ に対しては 7 次まで考慮すれば十分であることが分かる。

2.2 ボルテラ級数展開法

ボルテラ級数展開法を理解するために、2 つの異なる周波数成分をもつ入力で駆動される図 1 の回路について考えてみよう [3]。

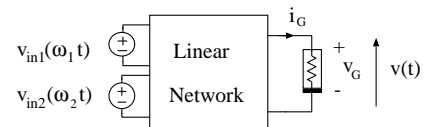


図 1 2 つの入力を持つ非線形回路

ただし、非線形特性は (3) の 3 次のべき級数で与えられるものとする。ここで、複素周波数 “s” の領域でボルテラ核を求めることにする^(注3)。1 次のボルテラ核は線形増分回路である図 2(a) における “ $r = 1/k_1$ ” の出力電圧に等しい [3]。すなわち、2 入力電源に対してはステップ入力 $U_1(s)$, $U_2(s)$ と置き、これらの応答 $H_{11}(s)$, $H_{12}(s)$ を用いて 1 次のボルテラ核は次のように書かれる。

$$H_{1k}(s) = H_{11}(s) + H_{12}(s) \quad (4)$$

(注2): これはあとに出てくるベース変調回路の動作点電圧である。

(注3): ボルテラ級数展開は次数を幾らでも高くすることは可能であるが、次数を高くするとボルテラ核が複雑化する。このため通常、3 次までが用いられている。

(注1): ボルテラ級数展開法の結果は漸近的解法に等しいことが証明されている [4]

ここで、 $H_{11}(s)$ 、 $H_{12}(s)$ はそれぞれ入力 $v_{in1}(\omega_1 t)$ 、 $v_{in2}(\omega_2 t)$ に対応していることに注意されたい。

2 次のボルテラ核は (3) と (4) から求められる 2 次のオーダの電流 I_{2N} を求めることから始まる。すなわち、

$$I_{2N}(s_1, s_2) = k_2 H_{1k}(s_1) H_{1k}(s_2) \quad (5)$$

このとき、線形抵抗 “r” から左側をみたアドミッタンスを $Y(s)$ とすると、2 次のボルテラ核 $H_{2k}(s_1, s_2)$ は

$$Y(s_1 + s_2) H_{2k}(s_1, s_2) = -I_{2N}(s_1, s_2) \quad (6)$$

の解として求める。

3 次のボルテラ核も同様にして、3 次のオーダの電流を求め

$$I_{3N}(s_1, s_2, s_3) = k_3 H_{1k}(s_1) H_{1k}(s_2) H_{1k}(s_3) + \frac{2}{3} k_2 [H_{1k}(s_1) \times H_{2k}(s_2, s_3) + H_{1k}(s_2) H_{2k}(s_1, s_3) + H_{1k}(s_3) H_{2k}(s_1, s_2)] \quad (7)$$

これを用いて 3 次のボルテラ核 $H_{3k}(s_1, s_2, s_3)$ が次式から求められる。

$$Y(s_1 + s_2 + s_3) H_{3k}(s_1, s_2, s_3) = -I_{3N}(s_1, s_2, s_3). \quad (8)$$

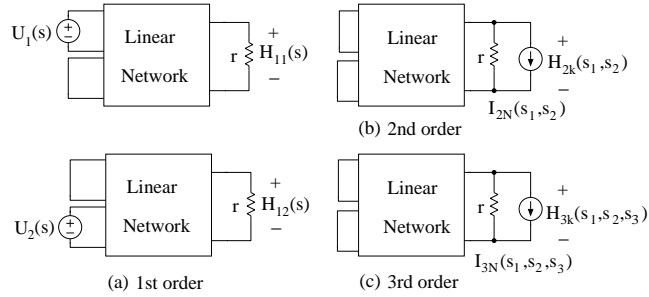


図 2 ボルテラ核の計算

このようにして、複素周波数領域での解は次のように書ける。

$$H_{out}(s_1, s_2, s_3) = H_{1k}(s_1) + H_{2k}(s_1, s_2) + H_{3k}(s_1, s_2, s_3). \quad (9)$$

ここで、次の 2 入力に対する周波数領域での解を求めると、周波数成分ごとに表 3 のようになる。

$$v_{in1}(t) = A_1 \sin \omega_1 t, \quad v_{in2}(t) = A_2 \sin \omega_2 t \quad (10)$$

表 3 周波数領域での出力電圧 [3]

周波数	振幅
DC	$ \frac{1}{2} A_1^2 H_{2k}(j\omega_1, -j\omega_1) + \frac{1}{2} A_2^2 H_{2k}(j\omega_2, -j\omega_2) $
ω_1	$ A_1 H_{1k}(j\omega_1) + \frac{3}{2} A_1 A_2^2 H_{3k}(j\omega_1, j\omega_2, -j\omega_2) + \frac{3}{4} A_1^3 H_{3k}(j\omega_1, j\omega_1, -j\omega_1) $
ω_2	$ A_2 H_{1k}(j\omega_2) + \frac{3}{2} A_1^2 A_2 H_{3k}(j\omega_1, -j\omega_1, j\omega_2) + \frac{3}{4} A_2^3 H_{3k}(j\omega_2, j\omega_2, -j\omega_2) $
$\omega_1 + \omega_2$	$ A_1 A_2 H_{2k}(j\omega_1, j\omega_2) $
$ \omega_1 - \omega_2 $	$ A_1 A_2 H_{2k}(j\omega_1, -j\omega_2) $
$2\omega_1$	$ \frac{1}{2} A_1^2 H_{2k}(j\omega_1, j\omega_1) $
$2\omega_2$	$ \frac{1}{2} A_2^2 H_{2k}(j\omega_2, j\omega_2) $
$2\omega_1 + \omega_2$	$ \frac{3}{4} A_1^2 A_2 H_{3k}(j\omega_1, j\omega_1, j\omega_2) $
$ 2\omega_1 - \omega_2 $	$ \frac{3}{4} A_1^2 A_2 H_{3k}(j\omega_1, j\omega_1, -j\omega_2) $
$\omega_1 + 2\omega_2$	$ \frac{3}{4} A_1 A_2^2 H_{3k}(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_2) $
$ \omega_1 - 2\omega_2 $	$ \frac{3}{4} A_1 A_2^2 H_{3k}(j\omega_1, -j\omega_2, -j\omega_2) $
$3\omega_1$	$ \frac{1}{4} A_1^3 H_{3k}(j\omega_1, j\omega_1, j\omega_1) $
$3\omega_2$	$ \frac{1}{4} A_2^3 H_{3k}(j\omega_2, j\omega_2, j\omega_2) $

このとき、核の計算は

$$s_i = \{\pm j\omega_1, \pm j\omega_2\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

と置くことによって求められる。ただし、式 (5) の計算には (4) を用いて

$$\begin{aligned} I_{2N}(\pm j\omega_1, \pm j\omega_2) &= k_2 ((H_{11}(\pm j\omega_1) + H_{12}(\pm j\omega_2)) \\ &\times ((H_{11}(\pm j\omega_1) + H_{12}(\pm j\omega_2)) \\ &= k_2 [H_{11}(j\omega_1) H_{11}(j\omega_1) + H_{11}(j\omega_1) H_{11}(-j\omega_1) \\ &+ H_{12}(j\omega_2) H_{11}(j\omega_2) + H_{12}(j\omega_2) H_{11}(-j\omega_2) \\ &+ 2H_{11}(j\omega_1) H_{12}(j\omega_2) + 2H_{11}(j\omega_1) H_{12}(-j\omega_2)] \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、第 1 項が $2\omega_1$ 成分、第 3 項が $2\omega_2$ 成分、第 2、4 項が直流成分、第 5 項が $\omega_1 + \omega_2$ 成分、第 6 項が $|\omega_1 - \omega_2|$ 成分に対応している。この電流を (6) の右辺に代入することで、対応する周波数成分の核が求まる。3 次のボルテラ核についても同様である。このようにして、表 3 が得られる。これらの計算は MATLAB を用いることにより容易に計算される [17]。

2.3 Spice による非線形電子回路の調波平衡法

ここでは、Spice と MATLAB を併用した調波平衡法 (HB) の解析手法について述べる。まず、代表的な非線形素子の一つであるバイポーラトランジスタの HB モジュールを導出してみよう。エバース・モルモデルでは、ベース・エミッタ間電圧 V_{BE} 、ベース・コレクタ間電圧 V_{BC} によって、コレクタ電流 i_C 、ベース電流 i_B 、エミッタ電流 i_E はそれぞれ次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} i_C &= I_S (\alpha_F \exp(V_{BE}/V_T) - \exp(V_{BC}/V_T)) \\ i_B &= I_S ((1 - \alpha_F) \exp(V_{BE}/V_T) + (1 - \alpha_R) \exp(V_{BC}/V_T)) \\ i_E &= -I_S (\exp(V_{BE}/V_T) + \alpha_R \exp(V_{BC}/V_T)) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

以下では次のような値を用いる。

$$I_S = 10^{-12} [\text{A}], \quad V_T = 0.026 [\text{V}], \quad \alpha_F = 0.99, \quad \alpha_R = 0.3$$

ここで、与えられた回路が 2 つの入力 (10) で駆動されるものとし、2 つの周波数の干渉によって生ずる周波数成分の内、次のような 13 個の周波数成分を考慮する。

$$\left. \begin{aligned} DC, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad 2\omega_1, \quad 2\omega_2, \quad 3\omega_1, \quad 3\omega_2 \\ \omega_1 + \omega_2, \quad |\omega_1 - \omega_2|, \quad 2\omega_1 + \omega_2, \quad |2\omega_1 - \omega_2| \\ \omega_1 + 2\omega_2, \quad |\omega_1 - 2\omega_2| \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

エバース・モルモデルは (13) のようにダイオード特性を利用しているため、バイポーラトランジスタの HB モジュールはダイオードの HB モジュールを用いて構成することができる。そこで、ダイオード HB モジュールを導出する。ダイオード特性を形式的に動作点 V_{d0} における 3 次のテーラ級数で近似する。

$$i_d = k_0(V_{d0}) + k_1(V_{d0})v_d + k_2(V_{d0})v_d^2 + k_3(V_{d0})v_d^3 \quad (15)$$

式 (14) の干渉周波数に対して、ダイオードの入出力関係を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} v_d(t) &= V_{d0} + \sum_{k=1}^K (V_{d,2k-1} \cos \nu_k t + V_{d,2k} \sin \nu_k t) \\ i_d(t) &= I_{d0} + \sum_{k=1}^K \{I_{d,2k-1} \cos \nu_k t + I_{d,2k} \sin \nu_k t\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

次に、式 (16) の第 1 式を (15) に代入し、フーリエ級数 i_d を MATLAB によりシンボリック形式で求める。このとき生ずる係数の掛け算の総数は

$$1 + 25 + 25^2 + 25^3 = 16276. \quad (17)$$

と膨大な数となる。これらの中から (14) に相当する周波数成分を選び出して Spice のネットリストを作成し、モジュール化すると図 3 が得られる。これを用いて、バイポーラトランジスタの HB モジュールを容易に作成することができる。このモ

ジュールをライブラリに登録しておくことと便利である。

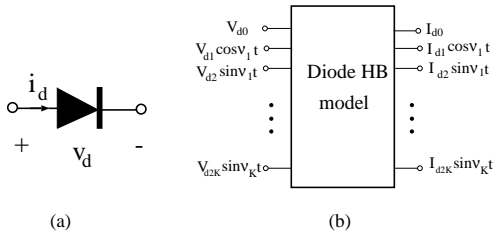


図3 (a) ダイオードモデル, (b) ダイオードのHBモジュール

また, LCR 素子に対しては

$$\left. \begin{aligned} i_C &= C \frac{v_C}{dt}, & v_C &= V_1 \cos \nu_k t + V_2 \sin \nu_k t \\ v_L &= L \frac{i_L}{dt}, & i_L &= I_1 \cos \nu_k t + I_2 \sin \nu_k t \\ v_R &= R i_R, & i_R &= I_{R1} \cos \nu_k t + I_{R2} \sin \nu_k t \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

なる関係から Sine-Cosine 変換 [15,16] をすると

$$\left. \begin{aligned} I_{C1} &= \nu_k C V_2, & I_{C2} &= -\nu_k C V_1 \\ V_{L1} &= \nu_k L I_2, & V_{L2} &= -\nu_k L I_1 \\ V_{R1} &= R I_{R1}, & V_{R2} &= R I_{R2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となり, 電流制御電圧源, 電圧制御電流源を用いて実現される。

	Cosine component	Sine component
Inductor		
Capacitor		
Resistor		

図4 LCR 素子の Sine-Cosine 変換

非線形素子のモジュールと共に上のような LCR の Sine-Cosine 変換によって構成される等価回路のネットリストは調波平衡法の決定方程式に等しく, Spice の DC 解析により解析される。

2.4 ボルテラ級数展開法と調波平衡法の比較

ここでは, 図 5(a) に示された簡単なベース変調回路を考えよう [18]。バイポーラトランジスタにはエバース・モルモデルを用い, ダイオードの特性は 3 次のテラ級数で近似する。また, ボルテラ級数展開法の次数も 3 次のオーダーとする。

2.4.1 ボルテラの場合 まず 動作点を求め, テラ級数に展開する必要がある。図 5(a) の回路に対しては動作点 $v_{d0} = 0.5822[V]$ が得られ, このときの 3 次のテラ級数は

$$i_d = 0.0130 + 0.52v_d + 10.40v_d^2 + 138.60v_d^3. \quad (20)$$

このようにして, 係数が次のように与えられる^(注4)。

$$k_1 = 0.52 (= g_d), \quad k_2 = 10.40, \quad k_3 = 138.60 \quad (21)$$

2.3 節の手法を用いて 3 次までのボルテラ核を求め, 表 3 の結果を利用し, MATLAB によって周波数領域での応答を求めると図 5(c) の周波数応答曲線が得られた。

(注4): この回路の場合, ベース・コレクタ間電圧は $V_{BC} < 0$ であるから, $I_S \exp(V_{BC}/V_T) = 0$ とした。

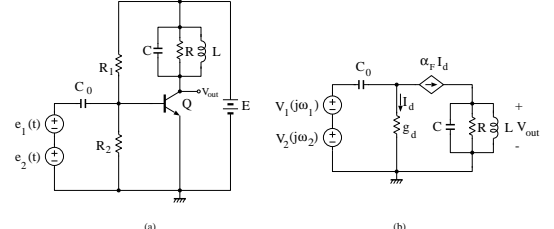
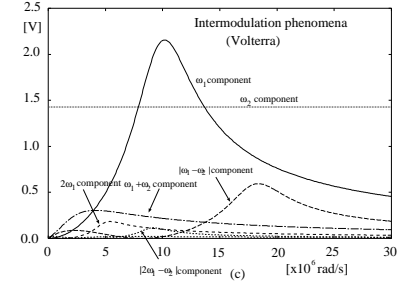
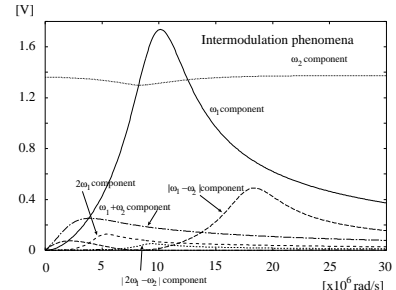


図5 (a) ベース変調回路, (b) 1 次のボルテラ級数の回路

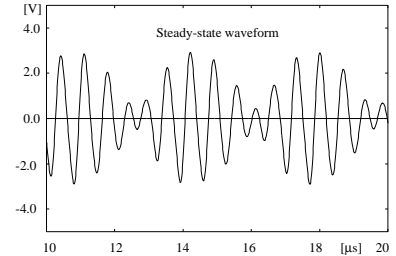
$R_1 = 50[k\Omega], R_2 = 10[k\Omega], R = 0.2[k\Omega]$
 $C = 1[nF], C_0 = 1[nF], C_0 = 1[nF], L = 10[\mu F], E = 10[V]$
 $v_1 = 0.02 \sin \omega_1 t, v_2 = 0.02 \sin \omega_2 t, \text{ for } \omega_2 = 8.2 \times 10^6 [\text{rad/sec}]$



(c) ボルテラ級数展開法によるベース変調回路特性



(d) 調波平衡法によるベース変調回路特性



(e) 定常振動波形 $\omega_1 = 10^7 [\text{rad/sec}], \omega_2 = 8.2 \times 10^6 [\text{rad/sec}]$

2.4.2 HB 法の場合 トランジスタをエバース・モルでモデリングし, 3 次のテラ級数

$$\left. \begin{aligned} i_{BC} &= I_{BC,0}(V_{BC,0}) + I_{BC,1}(V_{BC,0})v_{BC} \\ &\quad + I_{BC,2}(V_{BC,0})v_{BC}^2 + I_{BC,3}(V_{BC,0})v_{BC}^3 \\ i_{BE} &= I_{BE,0}(V_{BE,0}) + I_{BE,1}(V_{BE,0})v_{BE} \\ &\quad + I_{BE,2}(V_{BE,0})v_{BE}^2 + I_{BE,3}(V_{BE,0})v_{BE}^3 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

に展開して, この入出力関係を HB モジュール化し, これを用いて同一パラメータに対する周波数応答を求めたものが図 5(d) に示されている。全体的な特性はよく似ているが, HB 法の方が振幅が小さくなっていることと, ω_2 成分はボルテラ法ではほぼ一定であるのに対して, HB 法では変化している。このときの, 演算時間は 78.38[sec] であった。次に, トランジスタに直接エバース・モル モデルを適用し, 過渡解析により LCR タンク回路の電位差波形を計算したものが図 5(e) に示されている。

2.4.3 誤差比較 入力信号の振幅を変化させた場合の ω_1 と ω_2 成分を, ボルテラ級数展開法と HB 法により求めて誤差評価を行う(表 4)。ここで, ボルテラ法は直流動作点において, ダイオード特性を 3 次のテラ級数で近似した。一方, HB 法では全体の回路から求めた動作点を用いた。すなわち, この直

流動点の値は調波解析における他の調波成分にも関係することに注意しよう。過渡解析では、トランジスタモデルとしてエバース・モルモデルを用いている。

表 4 ω_1 と ω_2 の出力振幅の比較
($\omega_1 = 10^7$ [rad/s], $\omega_2 = 8.2 \times 10^6$ [rad/s])

$V_1 = V_2$	ボルテラ		HB 法		過渡解	
	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2
0.01	0.950	0.693	0.929	0.691	0.913	0.698
0.02	2.20	1.41	1.72	1.31	1.68	1.29
0.03	3.91	2.32	2.50	1.92	2.17	1.72
0.04	6.25	3.35	3.35	2.59	2.50	2.11
0.05	9.80	4.55	4.31	3.34	2.75	2.38

ここで、過渡解析の結果は (13) の特性を用いたので真値と見なすことができる。振幅の小さい $V_1 = V_2 = 0.01$ では、いずれの結果もほぼ等しいが、入力振幅が大きくなると、真値から大きく異なっている。特に、ボルテラ級数展開法の誤差の増加が目立つ。HB 法は真値に近いが、これも入力振幅の増加と共に誤差が増加している。これらには 2 つの要因が考えられる。

(1) 2.1 節で示したように、振幅が大きくなると、テラ級数を高次まで採用する必要がある。しかし、ボルテラ級数展開法では 3 次以上は難しいので精度を上げることは期待できない。

(2) 解法の違いから生ずるもので、準線形法に基づくボルテラ法と、考慮する周波数成分を総合的に取り扱う HB 法の違いが考えられ、HB 法がより厳密解に近いのは当然である。

3. 応用例

ここでは、3 つトランジスタから構成された図 6(a) の差動型ミキサ回路 [18] を解析してみよう。ただし、変調回路として使用する場合には、 $v_1(t)$ が搬送信号、 $v_2(t)$ が入力信号に相当し、さらに LC 共振周波数は搬送信号に等しく選ばれる。さて、トランジスタをエバース・モルモデル (13) を用いてモデリングを行い、

$$i_d = I_S e^{\lambda v_d}, \text{ for } I_S = 10^{-12} [\text{A}], \lambda = 40, \alpha = 0.99 \quad (23)$$

形式的なテラ級数で次のように近似する。

$$i_d \simeq k_0(v_{d0}) + k_1(v_{d0})v + k_2(v_{d0})v^2 + k_3(v_{d0})v^3, \quad v_d = v_{d0} + v \quad (24)$$

ここで、式 (14) で示された、13 個の干渉周波数を考慮し、MATLAB を用いてシンボリック形式でフーリエ級数に展開し、トランジスタの HB モジュール化を行う。このモジュールと LC 素子の Sine-Cosine 変換 (図 4) を用いて、調波成分ごとに等価回路を作成する。このとき、これら部分回路は従属電源を用いて互いに結合されていることに注意しよう。これらは Spice の直流解析によって解析される。図 6(b) に求めた周波数応答曲線を示す。ここで、 $\omega_2 = 57 \times 10^6$ [rad/s] に固定し、 ω_1 を連続的に変化させた。次に $\omega_1 = 50 \times 10^6$ [rad/s] における、出力波形を図 6(c) に示す。エバース・モルモデルを使用して過渡解析したものと、HB 法を比較したところ、次のような結果が得られた。

$$\left. \begin{aligned} V_{out,1} &= 0.7919 [\text{V}] \text{ (HB)} \quad V_1 = 0.8311 [\text{V}] \text{ (Tran. + DFT)} \\ V_{out,2} &= 0.9603 [\text{V}] \text{ (HB)} \quad V_2 = 0.9585 [\text{V}] \text{ (Trans. + DFT)} \\ \omega_1 &= 50 \times 10^6 [\text{rad/s}], \quad \omega_2 = 57 \times 10^6 [\text{rad/s}] \end{aligned} \right\}$$

両結果はほぼ一致している。一方、干渉波成分 ($\omega_1 + \omega_2$) と ($|\omega_1 - \omega_2|$) は十分小さく、 $\omega_1 = \omega = 57 \times 10^6$ [rad/s] のところで、 $|\omega_1 - \omega|$ 成分が零となっている。この場合の演算時間は 102.05[s] であった。

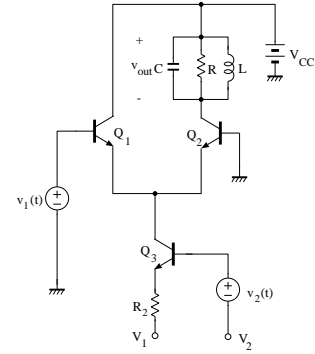
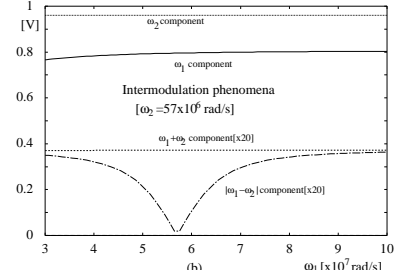
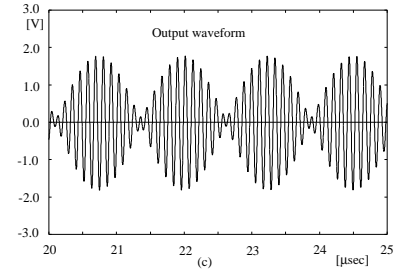


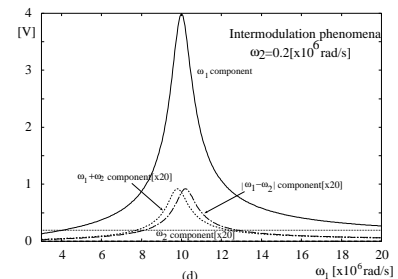
図 6 (a) ミキサ回路 $R_2 = 10$ [k Ω], $R = 100$ [Ω], $L = 10$ [μ H], $V_{CC} = 10$ [V], $V_1 = -10$ [V], $V_2 = -5$ [V]



(b) 周波数応答 $C = 1$ [pF], $v_1 = 0.002 \sin \omega_1 t$, $v_2 = 0.2 \sin 57 \times 10^6 t$.

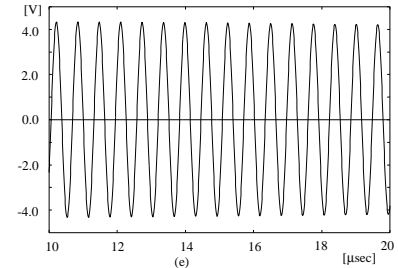


(c) 定常振動波形 $v_1(t) = 0.002 \sin 50 \times 10^6 t$, $v_2(t) = 0.2 \sin 57 \times 10^6 t$



(d) 変調回路の周波数応答

$C = 1$ [nF], $v_1 = 0.001 \sin \omega_1 t$, $v_2 = 0.1 \sin 0.2 \times 10^6 t$.



(e) 定常波形 $v_1(t) = 0.001 \sin 10^7 t$, $v_2(t) = 0.1 \sin 0.2 \times 10^6 t$

次に、図 6(a) を変調回路として考えることにする。このとき、RLC の共振周波数は 10^7 [rad/s] であり、搬送周波数 ω_1 または、 ω_2 を 10^7 [rad/s] と設定する必要がある。他方は入力信号であり、低い周波数に設定される。この周波数応答が図 6(d) に示されている。過渡解析からの結果と我々の HB 法を比較すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} V_{out,1} &= 3.987[V] \text{ (HB)} & V_1 &= 4.218[V] \text{ (Tran. + DFT)} \\ V_{out,2} &= 0.307[V] \text{ (HB)} & V_2 &= 0.337[V] \text{ (Tran. + DFT)} \\ \omega_1 &= 10^7[\text{rad/s}] & \omega_2 &= 0.2 \times 10^6[\text{rad/s}] \end{aligned} \right\}$$

いずれの結果もほぼ一致している^(注5)。計算時間は 209.30[s]であった。

4. む す び

本稿では、ボルテラ級数展開法と Spice と MATLAB を併用した HB 法の比較を変調回路とミキサ回路について行った。それらをまとめると次のようになる。

(1) ボルテラ級数展開法は記述関数的解析手法であるが、HB 法もフーリエ級数展開が MATLAB によって行われ、このシンボリック形式を用いて、決定方程式が等価回路で与えられると云う意味で数値解析的と云うより記述関数法に近い。また、いずれの方法も非線形特性はべき級数で表す必要がある。ただし、ボルテラの場合には動作点があらかじめ与えられる必要があるが、HB 法では形式的なテラ級数展開法を用いるため、その必要はない。

(2) ボルテラ級数展開法は MATLAB を用いて、効率よく計算されるが、オーダが 3 次以上になると計算式が煩雑になり、これ以上のオーダで計算した文献は見当たらない。

(3) HB 法でのフーリエ級数への展開は MATLAB によってシンボリックに行われ、この結果をネットリストとしてライブラリに登録しておけば便利である。しかしながら、登録可能なフーリエ級数の項数は用いる Spice に依存するようである。

(4) 過渡解析(厳密解)との比較ではボルテラ級数展開法よりも、HB 法の方が誤差の点では優れているようだ。

2.1 節に述べたように、非線形素子のテラ級数展開の次数が解の精度に大きく影響しているようである。そこで、今後の課題として、高次オーダのテラ級数にフーリエ級数展開を適用する HB 法を開発したい。

文 献

- [1] M.Schetzen, *The Volterra and Wiener Theorems of Nonlinear Systems*, John Wiley and Sons, 1978.
- [2] J.Wood and D.E.Root, *Fundamentals of Nonlinear Behavioral Modeling for RF and Microwave Design*, Artech House, 2005.
- [3] P.Wambacq and W.Sansen, *Distortion Analysis of Analog Integrated Circuits*, Kluwer Academic Pub., 1998.
- [4] B.J.Leon and D.J.Shafer, "Volterra series and Picard iteration for nonlinear circuits and systems," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol.25, pp.789-793, 1978.
- [5] C.Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill, 1964.
- [6] Y.Ueda, *The Road to Chaos-II*, Aerial Press. Inc., 2001.
- [7] R.J.Gilmore and M.B.Steer, "Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance-A review of the Art. Part I. Introductory concepts," *Int. Jour. of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Eng.* vol.1, pp.22-37, 1991.
- [8] R.J.Gilmore and M.B.Steer, "Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance-A review of the Art. Part II. Advanced concepts," *Int. Jour. of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Eng.* vol.1, pp.159-180, 1991.
- [9] 牛田明夫、田中衛、電子回路シミュレーション、コロナ社、2003.

- [10] A.S.Sedra and K.C.Smith, *Microelectronic Circuits*, Oxford Univ. Press, 2004.
- [11] R.Telichevesky, K.S.Kundert and J.K.White, "Efficient steady-state analysis based on matrix-free Krylov-subspace methods," *ACM*, pp.480-485, 1995.
- [12] K.S.Kundert, J.K.White and A.Sangiovanni-Vincentelle, *Steady-State methods for simulating Analog and Microwave Circuits*, Kluwer Academic, Pub. 1990.
- [13] Y.Yamagami, Y.Nishio, A.Ushida, M.Takahashi and K.Ogawa, "Analysis of communication circuits based on multidimensional Fourier transformation," *IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integ. Circuits Syst.*, vol.18, pp.1165-1177, 1999.
- [14] A.Ushida, T.Adachi and L.O.Chua, "Steady-state response of nonlinear circuits based on hybrid method," *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I*, vol.39, pp.649-661, 1992.
- [15] A.Ushida, Y.Yamagami and Y.Nishio, "Frequency responses of nonlinear networks using curve tracing algorithm," *ISCAS 2002*, vol.I, pp.641-644, 2002.
- [16] J.Kawata, Y.Taniguchi, M.Oda, Y.Yamagami and Y.Nishio and A.Ushida "Spice-oriented frequency domain analysis of nonlinear electronic circuits," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E90-A, pp.406-410, 2007.
- [17] 大石進一、MATLAB による数値計算、培風館、2004.
- [18] K.K.Clarke and D.T.Hess, *Communication Circuits: Analysis and Design*, Addison-Wesley Pub. Co., 1971.
- [19] R.Telichevesky and K.Kundert, *SpectreRF Primer*, Cadence Design Systems, San Jose, California, 1996.

付 録

1. 各種周波数領域での求解法の比較

ここでは、次の項目について比較してみる。

①非線形素子特性の関数、②非線形性の強さ、③解析原理、④解の精度、⑤多入力回路への対応、⑥複数解が存在する場合の求解の可能性、⑦その他特長・欠点

(1) ボルテラ級数展開法 [1-3] ①べき級数、②弱非線形系、③記述関数、④強非線形系では誤差が大(3次のオーダまで)、⑤簡単、⑥不可能、⑦MATLAB を用いて容易に解析できる。

(2) HB 法 [15-16] ①任意、②非線形性が強くなると、等価回路の規模が大きくなる、③Spice、④よい、⑤煩雑化する、⑥可能、⑦非線形性が強くても解が安定に求められる。

(3) 本 HB 法 ①べき級数、②非線形性が強くなると、等価回路の規模が大きくなる、③Spice、④よい、⑤簡単、⑥可能、⑦非線形性が強くても解が安定に求められる。

(4) 数値解析的手法 [11-13] ①任意、②任意、③FFT、ニュートン反復法、④高精度、⑤煩雑化し、演算効率悪い、⑥不可能、⑦周波数応答曲線の求解には適さない。

(5) 緩和法 [13] ①任意、②任意、③FFT、回路分割、緩和反復法、④高精度、⑤煩雑化し、演算効率悪い、⑥不可能、⑦周波数応答曲線の求解には適さない。

(6) SpectreRF [19] ①任意、②任意、③時間領域での解法、④高精度、⑤煩雑化し、演算効率悪い、⑥不可能、⑦周波数応答曲線の求解には適さない。

(注5): これらの誤差はトランジスタのテラ級数近似から生じているものと考えられる。