

インターミッテンシー・カオスのマルコフ・チェイン によるモデリング

Markov Chain Modeling of Intermittency Chaos

上手洋子[†]

西尾芳文[†]

牛田明夫[†]

[†]徳島大学工学部電気電子工学科

Yoko Uwate[†]

Yoshifumi Nishio[†]

Akio Ushida[†]

Dept. of Electrical and Electronic Eng., Tokushima University[†]

1 はじめに

インターミッテンシー・カオス [1] は、周期状態とカオス状態の間にある現象と言え、カオスの縁 (Edge of Chaos) と深い関係がある [2]。カオスの縁とは完全なカオスでもないし、完全に秩序化された状態でもない。言わば、両極が混在している状態のことである。多くの研究者は、カオスの縁のもつ、情報が適度に保存される安定性と、伝達される流動性との絶妙なバランスが様々な種類の情報処理に対して発達したカオスよりもよい性能を得るということを指摘している。

一方、カオスを組み合わせ最適化問題を解くホップフィールド・ニューラル・ネットワーク [3] に応用する方法が提案されている。これは、ホップフィールド・ニューラル・ネットワークで組み合わせ最適化問題を解くときに、解がローカルミニマムに陥ってしまって抜け出せないという重大な問題を回避するためにカオスをノイズとして注入するというものである。早川らは、ロジスティックマップによって得られるの 3 周期窓付近のカオスが巡回セールスマン問題(TSP) [4][5] を解くのに有効であることを示した。しかしながら、インターミッテンシー・カオスの有効性の原因は明かにされているとは言えない。したがって、インターミッテンシー・カオスのよい特徴を簡単なモデルで表し、その詳細な特性を研究することは非常に重要である。

本研究では、ロジスティックマップにより得られるインターミッテンシー・カオスのマルコフ・チェインによるモデリング方法を提案する。いくつかの研究グループによって、カオスシステムのマルコフ・チェインによるモデリング方法は提案されており [6]-[8]、カオスを利用したスペクトル拡散通信におけるカオス信号のノイズ除去 [6] や性能評価 [7] が可能となっている。さらに、self-similarity のような複雑な非線形現象を生成できることも確認されている [8]。これらのモデルは、カオスシステムで観測される様々な非線形現象を創り出すことが

できる。しかし、インターミッテンシー・カオスの特徴を抽出するという目的には適しておらず、したがってインターミッテンシー・カオスが持つよい性能の理由を明らかにするのは困難であると考えられる。そこで、本研究では、インターミッテンシー・カオスの特徴であるラミナー部の持続時間長の分布に注目し、モデリングを行う。本研究で提案する方法は、マルコフ・チェインのそれぞれの状態がカオス系列を量子化した値ではなく、カオスの連続的な軌道のふるまいであるという点でこれまでのモデルとは完全に異なるものである。本研究で提案するモデルは、非常にシンプルで、インターミッテンシー・カオスが持つ特徴をうまく引き出すことができる。提案したモデルが、インターミッテンシー・カオスのよい性能を持つことを確認するためにインターミッテンシー・カオスとマルコフ・チェインによって生成された時系列を二次割り当て問題(QAP)を解くホップフィールド・ニューラル・ネットワークにノイズとして注入したときの性能について評価する。

2 インターミッテンシー・カオス

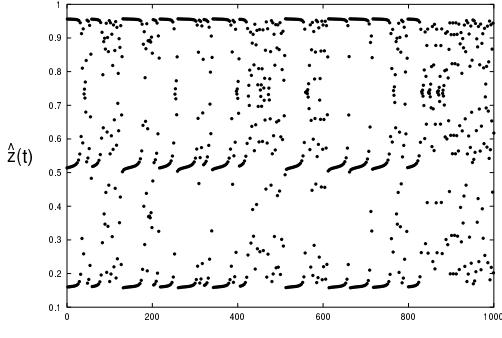
本研究では、次式のロジスティックマップで生成されるカオス時系列をカオスノイズとして用いる。

$$\hat{z}(t+1) = \alpha \hat{z}(t)(1 - \hat{z}(t)) \quad (1)$$

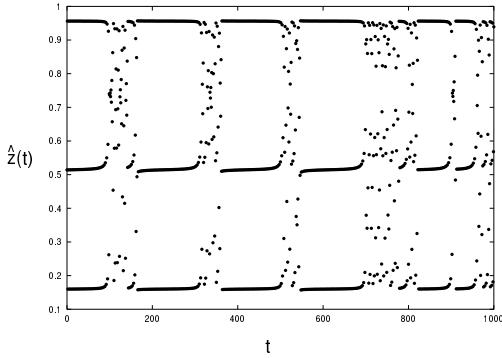
コントロールパラメータ α を変化させると式 (1) は周期倍分岐を経てカオス的にふるまう。

さらに、ロジスティックマップはよく知られているように周期窓の直前にインターミッテンシー・カオスと呼ばれる間欠性のバーストを作り出す。図 1 に 3 周期窓直前のインターミッテンシー・カオスの例を示す。この図より、カオス時系列はほぼ 3 周期の周期的なふるまいをするラミナー部と分布が不变区間に広がるバースト部から構成されていることがわかる。コントロールパラメータ α の値を少

しづつ大きくしていくとラミナー部の占める割合が増えていき最後には3周期窓が現れる。



(a) $\alpha=3.827940$.

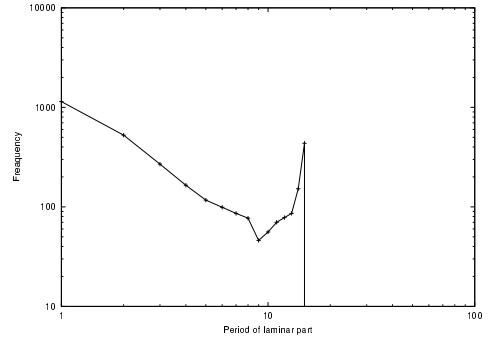


(b) $\alpha=3.828375$.

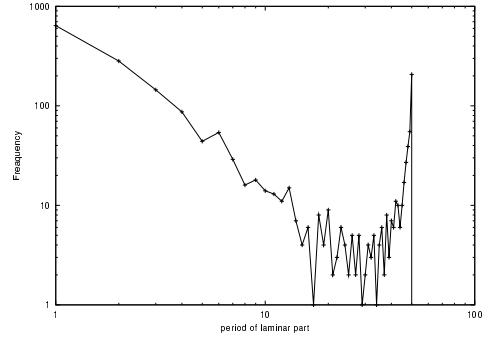
図 1: Intermittency chaos near 3-periodic window.

3 マルコフ・チェインによるモデリング

本節では、マルコフ・チェインを用いたインターミッテンシー・カオスのモデリングを行う。本研究では、3周期窓直前のインターミッテンシー・カオスだけを扱うので、インターミッテンシー・カオスを以下のようにラミナー部とバースト部に分類する。インターミッテンシー・カオスの時系列の値が0.9444以上であれば、そこから連続する3つの時系列を1サイクルのラミナー部とみなし、それ以外の値であればバースト部とみなす。マルコフ・チェインモデルを正確に作るために、ラミナー部の持続時間長(サイクル数)の分布をカウントした。ロジスティックマップを100000イタレーション繰り返す間に発生したラミナー部のおのおのの持続時間長の頻度を図2に示す。この図より、その分布



(a) $\alpha=3.827940$.



(b) $\alpha=3.828375$.

図 2: Distribution of period of laminar part.

は簡単なスケーリング則に従っていないことがわかる。すなわち、ラミナー部の持続時間長は無限に大きくならず、最大値でピークをとっている。我々は、この性質がインターミッテンシー・カオスの特性を最も特徴づけるものであると考える。

インターミッテンシー・カオスの上述の特性をモデルリングするために、図3に示すようなマルコフ・チェインモデルを提案する。ここで、 $P(S_k|S_l)$ は状態が S_l から S_k に移り変わる確率で、

$$P(S_{k+1}|S_k) + P(S_0|S_k) = 1 \quad (k = 0 \sim L-1) \quad (2)$$

を満足しなければならない。このマルコフ・チェインモデルでは S_0 はバースト部に対応し、 $S_1 \sim S_L$ の状態はラミナー部の1サイクル $\{0.956, 0.160, 0.514\}$ に対応する。そして、 S_k の添字の k はその時のラミナー部の持続時間長を表す。

S_k の状態確率を $Q(S_k)$ と表すと遷移確率は以

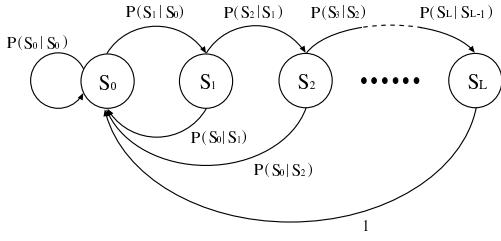


図 3: Markov chain.

以下の式を満たす。

$$Q(S_k) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{L-1} P(S_0|S_l)Q(S_l) + Q(S_L) & (k = 0) \\ P(S_k|S_{k-1})Q(S_{k-1}) & (0 < k \leq L) \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^L Q(S_k) = 1 \quad (4)$$

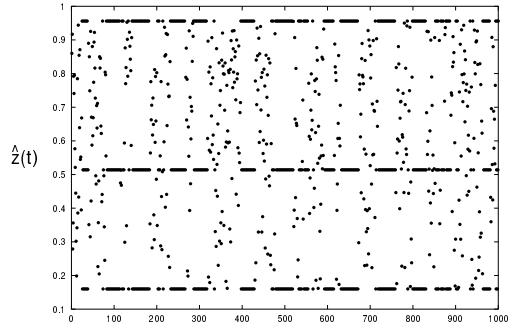
対応する状態の数をカウントすることによって、インターミッテンシー・カオスのシミュレーションデータからマルコフ・チェインモデルの状態確率を導く。そして、式(3)の状態確率から遷移確率を計算することができる。

図4に $L = 15, 50$ のときのマルコフ・チェインモデルにより得られた時系列を示す。得られた時系列の統計的な特性を調べるために、ラミナー部の持続時間長を計算した。その結果を図5に示す。図4、図5の結果は図1、図2とよく似ていることが分かる。

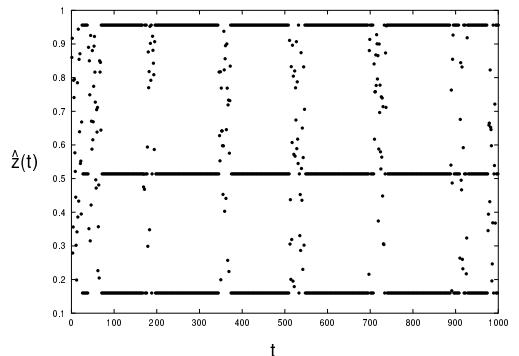
さらに、我々はラミナー部の最大持続時間長 L が様々なサイズになるマルコフ・チェインモデルを作り出した。インターミッテンシー・カオスとマルコフ・チェインモデルの特性の比較を表1にまとめる。Ratio of laminar part は、時系列全体に対するラミナー部の時間的割合を示すものであり、Average length of laminar part は、ラミナー部の持続時間長の平均を表している。

4 QAP を解く Hopfield NN への応用

インターミッテンシー・カオスとマルコフ・チェインモデルの応用の一つとして、QAPを解くホップフィールド・ニューラル・ネットワークへの応用を考える。エネルギー関数のローカルミニマムに陥った解を抜け出す手法としてこれらをノイズとして注入し、そのときの性能について研究を行う。



(a) $L=15$.



(b) $L=50$.

図 4: Time series of the Markov chain model.

QAPは非常に難しい問題で、要素数が大きくなると最適解を見つけることはほとんど不可能である。要素数の大きい問題は最近の研究では、決定論的方法で解かれている。そして、正確な最適解を得るために非常に長い計算時間が必要となる。したがって、ほどよい時間で最適解に近い解を見つける発見的な手法の発展が必要である。

ホップフィールド・ニューラル・ネットワークでQAPを解く方法について説明する。QAPはよく工場配置問題に例えられる(図6)。各都市に工場を配置していくのだが、各都市間の距離と各都市間で使用するコストが決まっている。ここで工場を配置するパターンはいくつも考えられるのだが、そのなかで総合的なコストが最も小さいパターンを探し出すのがQAPである。

i番目とj番目の都市間の距離を C_{ij} 、m番目とn番目の工場間におけるコストを D_{mn} とした $N \times N$

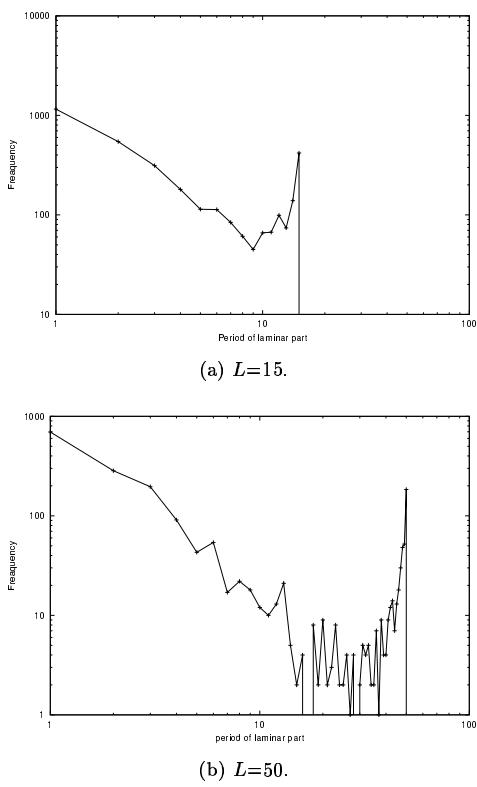


図 5: Distribution of period of laminar part.

の行列 C , D に置き換えて考えたとき, 1つのパターンに対応するコストを定式化してみる。 i 番目の都市に配置する工場を $p(i)$ としたときコスト E は,

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} D_{p(i)p(j)} \quad (5)$$

と書き表すことができる。

N 要素の QAP をホップフィールド・ニューラル・ネットワークで解くには, $N \times N$ ニューロンが必要である。エネルギー関数は以下の式で定義される。

$$E = \sum_{i,m=1}^N \sum_{j,n=1}^N w_{im;jn} x_{jn} + \sum_{i,m=1}^N \theta_{im} x_{im} \quad (6)$$

ニューロン間は互いにシナプス結合によって結合されている。 (i, m) 番目のニューロンと (j, n) 番目のニューロンの結合係数, (i, m) 番目のニューロン

表 1: Properties of intermittency chaos and Markov chain model.

	Ratio of laminar part		Average length of laminar part	
L	Chaos	Markov	Chaos	Markov
7	0.4215	0.4156	3.1495	3.0789
9	0.4714	0.4580	3.8271	3.7139
11	0.5049	0.5049	4.3486	4.2729
13	0.5348	0.5289	4.9732	4.9216
15	0.5558	0.5524	5.4389	5.2984
17	0.5798	0.5700	5.9185	5.7266
19	0.5905	0.6083	6.5688	6.5358
21	0.6251	0.6313	7.0888	7.1835
23	0.6422	0.6424	7.4430	7.3444
25	0.6445	0.6427	7.4853	7.4764
30	0.6878	0.6804	9.2968	8.8704
40	0.7261	0.7196	11.5463	11.1663
50	0.7655	0.7580	13.6257	12.8656
70	0.8240	0.8167	19.7186	19.2385
100	0.8563	0.8532	24.8647	24.4863

のしきい値は以下の式で記述される。

$$\begin{aligned} w_{im;jn} &= -2 \left\{ A(1 - \delta_{mn})\delta_{ij} \right. \\ &\quad \left. + B\delta_{mn}(1 - \delta_{ij}) + \frac{C_{ij}D_{mn}}{q} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\theta_{im} = A + B$$

ここで, A および B は正の定数, δ_{ij} はクロネッカーデルタである。 $N \times N$ ニューロンの状態の非同期更新は以下の式で表される。

$$x_{im}(t+1) = g \left(\sum_{j,n=1}^N w_{im;jn} x_{jn}(t) + \theta_{im} + \beta z_{im}(t) \right) \quad (8)$$

ここで g はシグモイド関数である。 $z_{im}(t)$ はインターミッテンシー・カオスまたはマルコフ・チェインモデルの時系列で, β は時系列の振幅を調整するものである。我々は時系列 \hat{z}_{im} の正規化をホップフィールド・ニューラル・ネットワークに注入する前に式 (9) によって行う。

$$z_{im}(t+1) = \frac{\hat{z}_{im}(t) - \bar{z}}{\sigma_z} \quad (9)$$

ここで \bar{z} は $\hat{z}(t)$ の平均, そして σ_z は $\hat{z}(t)$ の標準偏差である。さらに, ニューロンの発火の判定方法として佐藤らの提案した方法 (1.1 in [9]) を用いる。

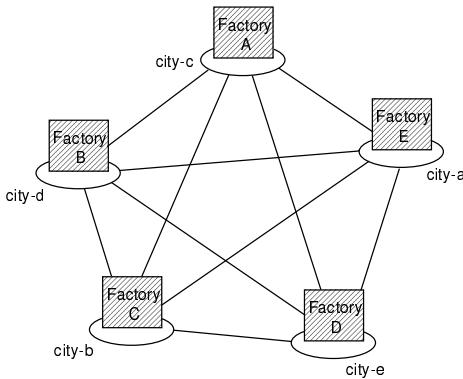


図 6: QAP model.

5 シミュレーション結果

本研究では解析する問題を QAPLIB といわれるベンチマークサイトから選んだ。本論文では，“Nug12”の解析結果を示す。この問題の最適解は 578 で、ネットワークの更新回数は 10000 回とする。ホップフィールド・ニューラル・ネットワークのパラメータは $A = 0.5$, $B = 0.5$, $q = 600$, $\varepsilon = 0.02$ で、注入する時系列の振幅を調整するパラメータは $\beta = 0.56$ とする。

ホップフィールド・ニューラル・ネットワークにノイズを加えることの目的は多数の解を探し出すことであるが、ノイズの性質によっては、一度見つけた解を何度も繰り返し探索したり、ある一つの解から非常に長い間脱出できなかったりする場合がしばしば見られる。これは、最適解や最適解付近の解を多数探し出したいという目的には沿わないでの、本研究では、同一試行中では新しく見つけた解のみを解として認定することにする。

また、組み合わせ最適化問題を解くような研究では、最適解だけでネットワークの性能が評価されてきた。しかし、問題が複雑になったり、大きくなると最適解を見つけることが非常に困難になり、最適解だけでネットワークの性能を評価するには正当性がないと考えられる。そこで、最適解にいかに近い解をたくさん見つけられるかが重要な評価になる。そして、最適解付近のよい解を多く見つける性能を的確に評価するために次の二つの指標を用いる [11]。

5.1 Depth_1

まず、最初の指標 $Depth_1$ は次のように定義される。

$$Depth_1 = \sum_{k=0}^n \{f(\mathbf{p}_k) - D_\infty\}^2 \quad (10)$$

ここで、 D_∞ は定数であり、全ての解より大きいものとする。 n は認定された解の数、 $f(\mathbf{p}_k)$ は式(5)で計算されるエネルギー、ベクトル \mathbf{p}_k は k 番目の解に相当する。

$Depth_1$ の結果を図 7 に示す。ラミナー部の最大時間長 L の値が大きくなるに従い、 $Depth_1$ がインターミッテンシー・カオス、マルコフ・チェインモデルとも同じように減少しているのがわかる。

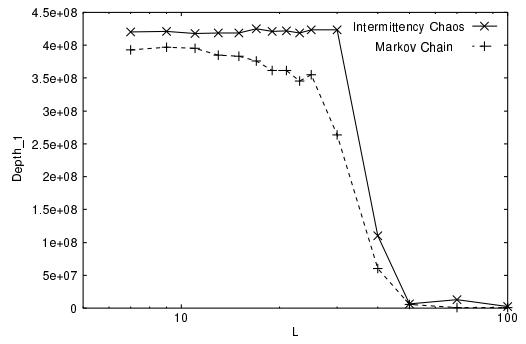


図 7: Result of $Depth_1$ ($D_\infty = 1000$)。

5.2 Depth_2

さらに、よい解を多く見つけることをより的確に評価する指標として $Depth_2$ を提案している [11]。 $Depth_2$ は以下の式で表される。

$$Depth_2 = \sum_{k \in \mathbf{k}_g}^n \{f(\mathbf{p}_k) - D_{th}\}^2 - \sum_{k \notin \mathbf{k}_g}^n \{f(\mathbf{p}_k) - D_{th}\}^2 \quad (11)$$

where $\mathbf{k}_g = \{k \mid f(\mathbf{p}_k) \leq D_{th}\}$.

ここで、 D_{th} の値の選び方について説明する(図 8)。 $Depth_2$ では、よい解を多く求めているということを際立たせるための評価であるので、 $Depth_2$ の D_{th} の値は大きなポイントとなる。本研究では、ホップフィールド・ニューラル・ネットワークを使わないランダムサーチによって求まる解の分布から求めた解の平均を調べ、その平均を D_{th} とした。

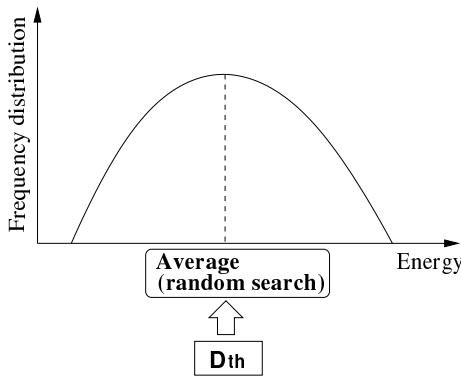


図 8: Decision of D_{th} .

Depth_2 の結果を図 8 に示す。マルコフ・チェインモデルとインターミッテンシー・カオスがよく似た性能であることがわかる。この結果は、マルコフ・チェインモデルがインターミッテンシーの最適解付近の解を多く見つけるという重要な特徴を持っていることを示している。

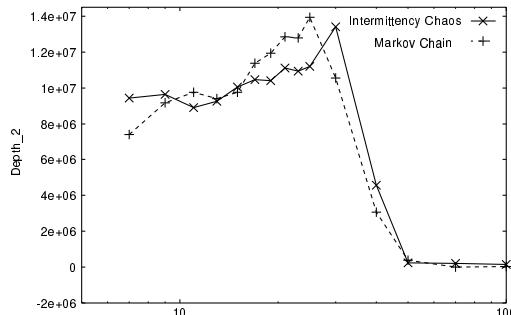


図 9: Result of *Depth_2* ($D_{th} = 812$).

6まとめ

本研究では、マルコフ・チェインを用いたインターミッテンシー・カオスのモデリング方法を提案した。QAP を解くホップフィールド・ニューラル・ネットワークにインターミッテンシー・カオスおよびマルコフ・チェインモデルより生成される時系列を注入した場合のネットワークの性能について研究を行った。コンピュータシミュレーションの結果、提案したモデリングがインターミッテンシー・

カオスとよく似たよい性能を得る時系列を生成することが確認された。

References

- [1] Y. Pomeau and P. Manneville, "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems," *Comm. Math. Phys.*, vol. 74, pp. 189-197, 1980.
- [2] C. G. Langton, "Computation at the Edge of Chaos: Phase Transitions and Emergent Computation," *Physica D*, vol. 42, pp. 12-37, 1990.
- [3] J. J. Hopfield, "Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties like Those of Two-State Neurons," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 81, pp. 3088-3092, 1984.
- [4] 早川美德, 澤田康次, “カオス振動子を内蔵した神経回路の動作機構と性能評価” 電子情報通信学会技術報告, vol. NLP94-39, pp. 47-52, 1994.
- [5] Y. Hayakawa and Y. Sawada, "Effects of the chaotic noise on the performance of a neural network model for optimization problems," *Physical Review E*, vol. 51, no. 4, pp. 2693-2696, 1995.
- [6] H. Dedieu and M. J. Ogorzalek, "Overview of Nonlinear Noise Reduction Algorithms for Systems with Known Dynamics," *Proc. NOLTA '98*, pp. 1297-1300, 1998.
- [7] R. Rovatti, G. Mazzini and G. Setti, "A Tensor Approach to Higher Order Expectations of Quantized Chaotic Trajectories; Part I and II," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 47, no. 11, pp. 1571-1596, 2000.
- [8] R. Rovatti and G. Mazzini, "Tensor Function Analysis of Quantized Chaotic Piecewise-Affine Pseudo-Markov Systems; I and II," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 49, no. 2, pp. 137-162, 2002.
- [9] 佐藤慶一, 池口徹, 長谷川幹雄, 合原一幸, “カオスダイナミクスを用いた二次割当問題の一解法” 電子情報通信学会技術報告, vol. NLP94-39, pp. 47-52, 1994.
- [10] R. E. Berkard, S. E. Karisch and F. Rendl, "QAPLIB – A Quadratic Assignment Problem Library," <http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/qplib>
- [11] Y. Uwate, Y. Nishio, T. Ueta, T. Kawabe and T. Ikeguchi, "Performance of Chaos Noise Injected to Hopfield NN for Quadratic Assignment Problems," *Proc. NOLTA '02*, pp. 267-270, Oct. 2002.