論　文

対称性をもつある強制回路に発生する周期窓

関川　宗久[†a)]　三好　徹哉[†,††]　西尾　芳文[†††]　稲葉　直彦[†]

Periodic Windows in a Non-autonomous Circuit with a Symmetry

Munehisa SEKIKAWA[†a)], Tetsuya MIYOSHI[†,††], Yoshifumi NISHIO[†††], and Naohiko INABA[†]

あらまし　系の対称性はカオス発生回路においてしばしば見られる性質である．このような対称性をもつ非線形回路には，対称性破壊分岐や symmetry recovering crisis など，系の対称性に基づく極めて興味深い現象が発生する．本論文では，対称性をもつ強制レイリー方程式に発生する周期窓に注目し，強制系においても 2 種類の周期窓が可算無限個，交互に発生することを明らかにし，周期窓の発生するパラメータ値がある不変定数と関係していることを示す．

キーワード　カオス，対称性，周期窓

1. まえがき

系の対称性は自然界においてしばしば見られる性質である．このような特徴はカオスを発生する電気回路においても頻繁に見られる [1]〜[4]．例えば，Double Scroll 回路においては，系を記述する回路方程式は $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ の変換に対し不変である．このような系には，対称性破壊分岐や symmetry recovering crisis [5] など，系の対称性に基づく極めて興味深い分岐現象が発生する．

Nishio らは，1 対のダイオードを含む電気回路に発生する周期窓に注目し，これの解析を行った [4]．この回路を記述する回路方程式は $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ の変換に対し不変であり，この回路に発生する周期窓には，原点について対称な形状をした周期窓と，原点について非対称な形状をした周期窓が原点について対称な位置に存在する場合がある．これらの周期窓をそれぞれ，Type I，Type II の周期窓 [4] と呼ぶ．Nishio らはこの回路に理想ダイオード型拘束方程式を用いるアプローチを適用し，ポアンカレ写像を 1 次元写像として導出することにより，これらの 2 種類の周期窓が交互に可算無限個発生することを理論的に証明した．更に，これらの周期窓の発生するパラメータがある種の不変定数と関係することを計算機実験によって示した [4]．

Nishio らの研究では，3 次元自励振動回路の解析が行われたが，系の対称性は強制回路においてもしばしば見られる特徴である．例えば，強制レイリー方程式 [6]〜[9] や Duffing の方程式 [10], [11] においては，$(\tau, x, y) \rightarrow (\tau + \pi/\omega, -x, -y)$ の変換に対し不変である．このような強制回路においても，位相平面上で原点について対称な形状をした周期窓と，原点について非対称な形状をした周期窓が発生する．したがって，対称性をもつ強制回路に発生する周期窓の構造を明らかにすることは極めて興味深い問題と考えられる．

本論文では，1 対のダイオードを含む強制レイリー方程式に発生する周期窓現象を解析する．この回路を記述する回路方程式も $(\tau, x, y) \rightarrow (\tau + \pi/\omega, -x, -y)$ の変換に対し不変である．数値実験の結果，原点について対称な形状をした周期窓と，原点について非対称な形状をした周期窓が存在することが明らかとなる．理想ダイオード型拘束方程式を用いるアプローチを適用することにより，ポアンカレ写像を 1 次元写像として導出し，これらの 2 種類の周期窓を詳しく調べる．

† 宇都宮大学工学部，宇都宮市
Faculty of Engineering, Utsunomiya University, Utsunomiya-shi, 321–8585 Japan
†† 栃木県産業技術センター，宇都宮市
Industrial Technology Center of Tochigi Prefecture, Utsunomiya-shi, 321–3224 Japan
††† 徳島大学工学部，徳島市
Faculty of Engineering, The University of Tokushima, Tokushima-shi, 770–8506 Japan
a) E-mail: moosk@every.is.utsunomiya-u.ac.jp

そして，これらの周期窓が交互に可算無限個発生し，周期窓の発生するパラメータ値がある種の不変定数と関係していることを計算機実験によって明らかにする．本論文で対象とする強制回路より得られた不変定数は，文献 [4] で得られた不変定数とは異なっていた．

2. 回路モデルとその方程式

図 1 に本論文で対象とする回路モデルを示す．$-g_N$ は線形負性コンダクタンス，g_E は線形正コンダクタンスである．v はキャパシタ C の両端にかかる電圧，i はコイル L を流れる電流，i_d は 1 対のダイオードを流れる電流である．また，E_f は正弦波外力の振幅，ω_f はその角周波数である．まず，1 対のダイオードの電圧–電流特性を以下の区分線形関数により近似する．図 2 にその特性を示す．

$$i_d(v) = \begin{cases} g_d(v-V) & (v \geq V) \\ 0 & (|v| < V) \\ g_d(v+V) & (v \leq -V) \end{cases} \tag{1}$$

回路方程式は次式によって表される．

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = v \\ C\dfrac{dv}{dt} = -i + (g_N - g_E)v - i_d(v) \\ \qquad +g_E E_f \sin \omega_f t \end{cases} \tag{2}$$

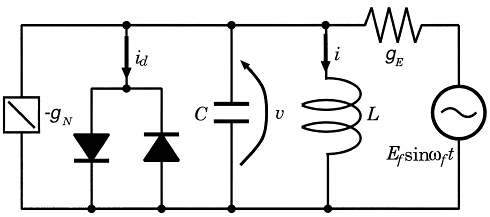


図 1　回路モデル
Fig. 1　Circuit diagram.

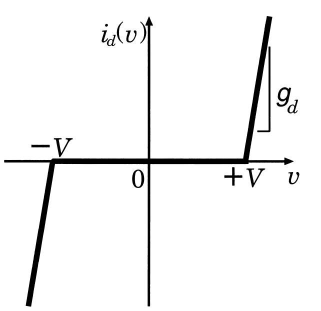


図 2　1 対のダイオードの電圧–電流特性
Fig. 2　v–i characteristic of a diode pair.

次のような変数変換を行うことにより，

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad x = \frac{i}{V}\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \delta = \frac{g_N - g_E}{2}\sqrt{\frac{L}{C}},$$
$$\alpha = (g_d + g_E - g_N)\sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad E = \frac{g_E E_f}{V}\sqrt{\frac{L}{C}},$$
$$\omega = \omega_f\sqrt{LC}, \quad '\bullet' = \frac{d}{d\tau} \tag{3}$$

以下の正規化された方程式が得られる．

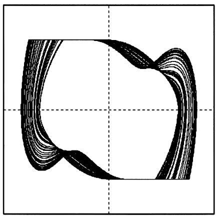
$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = E \sin \omega\tau,$$
$$f(\dot{x}) = \begin{cases} \alpha(\dot{x}-1) - 2\delta & (\dot{x} \geq 1) \\ -2\delta\dot{x} & (|\dot{x}| < 1) \\ \alpha(\dot{x}+1) + 2\delta & (\dot{x} \leq -1) \end{cases} \tag{4}$$

式 (4) は $(\tau, x, y) \to (\tau + \pi/\omega, -x, -y)$ の変換に対し不変である．

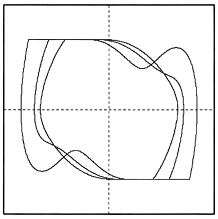
ダイオードは強非線形素子であるので，$\alpha \gg 1$ の場合を対象とする．また，$0 < \delta < 1$ となる場合を対象とする．このとき，$|\dot{x}| < 1$ の領域において二つの固有値は複素共役となり，$\delta \pm j\gamma$ $(\gamma = \sqrt{1-\delta^2})$ によって与えられる．ここで，式 (4) は区分的に線形であるので，各々の領域において解は解析的に求めることができる．

図 3 にアトラクタの例を示す．パラメータ (ω, δ) を $(0.3, 0.3)$ と固定する．カオス相の間に図 3 (b)，(d) に見られるように周期アトラクタが発生している．このようなカオス相のすき間に現れる周期アトラクタは周期窓と呼ばれている．系の対称性により図 3 (b) の周期窓は原点について対称な形状をしている．一方，図 3 (d) の周期窓は原点について非対称な形状をしており，原点について対称な位置に存在している．ここで，図 3 (d) の左右の図は初期値が異なる．図 3 (b) のような周期窓を Type I の周期窓，図 3 (d) のような周期窓を Type II の周期窓 [4] と呼ぶ．

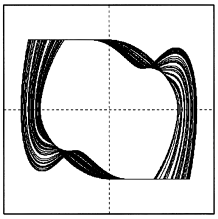
Type I，Type II それぞれの周期窓が発生している近傍の 1 パラメータ分岐ダイアグラムを図 4 に示す．$\ddot{x} < 0$，かつ $\dot{x} = 1$ の条件を満たすときをプロットした．同図において $\theta_n = \omega\tau/2\pi \bmod 1$ であり，過渡状態を無視した 500 点がプロットしてある．図 4 (a)，(b) において，上と下の図は初期値が異なる．Type II の周期窓において，初期値に対し原点について非対称な形状をした 2 種類の周期窓が発生する．したがって，図 3 と同様に異なる初期値を与えた場合，図 3 (d) のように周期窓の発生する位置が異なるため，図 4 (b)



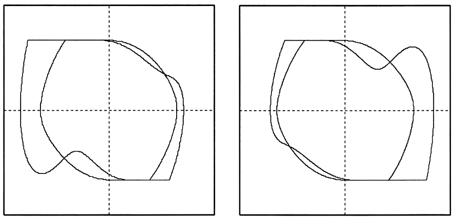
(a) Chaotic attractor ($E = 3.0298$)



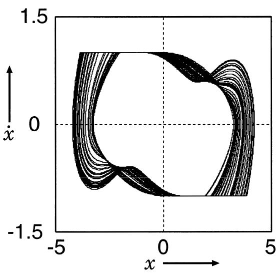
(b) Periodic attractor ($E = 3.02985$)



(c) Chaotic attractor ($E = 3.0305$)



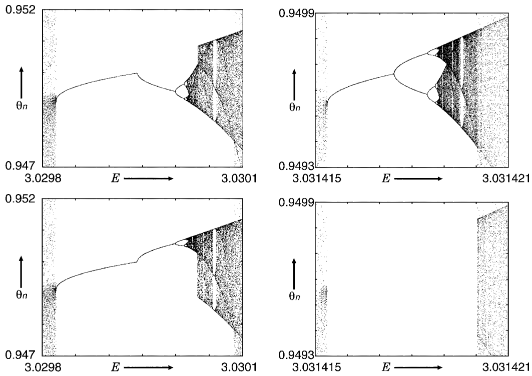
(d) Periodic attractor ($E = 3.031416$)



(e) Chaotic attractor ($E = 3.031421$)

図 3　アトラクタ
Fig. 3　Attractors ($\alpha = 100,\ \omega = 0.3,\ \delta = 0.3$).

上ではアトラクタが観察されるが，図 4 (b) 下では解はこの近傍を通過しない．



(a) Periodic window of Type I.　(b) Periodic window of Type II.

図 4　2 種類の周期窓
Fig. 4　Two types of periodic windows ($\omega = 0.3,\ \delta = 0.3$).

3. ダイオードを理想化した場合の解析

カオス現象は強制系では 2 次元以上の系において発生する．分岐現象の解析の常套手段は写像法である．しかしながら，2 次元以上の強制系ではポアンカレ写像は 2 次元以上になり，2 次元以上の離散力学系の性質については詳しいことは分かっていないことなどから，周期窓現象を詳細に解析することは難しい．

そこで本論文では，回路に含まれる 1 対のダイオードを図 5 に示すような理想的なスイッチとして解析を行う．このような理想化を施すと回路方程式は 1 次元縮退し，ポアンカレ写像は 1 次元写像として導出することができる．この理想化は，$\alpha \to \infty$ の極限に相当する [12]．このとき回路方程式は次式の理想ダイオード型拘束方程式によって表される．

$$\begin{cases} +on\ :\ \dot{x} = 1 & \text{(5a)} \\ off\ :\ \ddot{x} - 2\delta\dot{x} + x = E\sin\omega\tau & \text{(5b)} \\ -on\ :\ \dot{x} = -1. & \text{(5c)} \end{cases}$$

図 5 に示すように片方のダイオードがしきい値電圧 $+V$ に拘束されている領域を $+on$，もう片方のダイオードがしきい値電圧 $-V$ に拘束されている領域を $-on$ と呼ぶ．また，ダイオードに電流が流れていない領域を off と呼ぶ．

式 (5) の解は以下の遷移条件によって接続される．

$$\begin{cases} off \to +on\ :\ \dot{x} = 1 \\ +on \to off\ :\ x = 2\delta + E\sin\omega\tau \\ off \to -on\ :\ \dot{x} = -1 \\ -on \to off\ :\ x = -2\delta + E\sin\omega\tau. \end{cases} \tag{6}$$

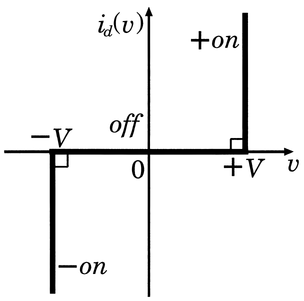


図 5　理想ダイオードの v–i 特性
Fig. 5　v–i characteristic of an idealized diode pair.

式 (6) は以下のようにして求められる．1 対のダイオードが off のときは，コンデンサにかかる電圧 v がしきい値電圧 $+V(-V)$ に達するとき，すなわち，$\dot{x}=1$ ($\dot{x}=-1$) のとき 1 対のダイオードは $+on(-on)$ となる．一方，1 対のダイオードが $+on(-on)$ のときは，1 対のダイオードに流れる電流 i_d が 0 になるとき off に切り換わる．$i_d=0$ より，$+on$ のとき $x=2\delta+E\sin\omega\tau$ が，$-on$ のとき $x=-2\delta+E\sin\omega\tau$ が導かれる．

式 (5) は区分的に線形であるので，各領域の解は解析的に得られる．$\boldsymbol{\lambda}\equiv(\delta,\omega,E)$ を 3 次元パラメータ，$\boldsymbol{P}_0\equiv\big(\tau_0,x(\tau_0),\dot{x}(\tau_0)\big)$ を初期条件とする．三つの領域における解を識別するため，$\dot{x}=1$，$|\dot{x}|<1$，$\dot{x}=-1$ の状態にある式 (4) 解をそれぞれ $(\phi_{+on}\quad\dot{\phi}_{+on})^T$，$(\phi_{off}\quad\dot{\phi}_{off})^T$，$(\phi_{-on}\quad\dot{\phi}_{-on})^T$ とする．式 (5) の解は以下のようになる．

- $\dot{x}=1$：

$$\begin{pmatrix}\phi_{+on}(\tau;\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{\lambda})\\ \dot{\phi}_{+on}(\tau;\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{\lambda})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(\tau_0)+(\tau-\tau_0)\\ 1\end{pmatrix}\tag{7}$$

- $|\dot{x}|<1$：

$$\begin{pmatrix}\phi_{off}(\tau;\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{\lambda})\\ \dot{\phi}_{off}(\tau;\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{\lambda})\end{pmatrix}=\boldsymbol{F}_2(\tau-\tau_0)\times\begin{pmatrix}A_2\\ B_2\end{pmatrix}+\boldsymbol{G}_2(\tau)$$

ここで，

$$\boldsymbol{F}_2(\tau)=\Big(\boldsymbol{f}_2(\tau)\quad\dot{\boldsymbol{f}}_2(\tau)\Big)^T,$$
$$\boldsymbol{G}_2(\tau)=(\boldsymbol{g}_2(\tau)\quad\dot{\boldsymbol{g}}_2(\tau))^T,$$
$$\boldsymbol{f}_2(\tau)=\Big(e^{\delta\tau}\sin\gamma\tau\quad e^{\delta\tau}\cos\gamma\tau\Big),$$
$$\gamma=\sqrt{1-\delta^2}$$
$$\boldsymbol{g}_2(\tau)=k_{2a}\sin\omega\tau+k_{2b}\cos\omega\tau$$
$$\dot{\boldsymbol{f}}_2(\tau)=\tfrac{d}{d\tau}\boldsymbol{f}_2(\tau),\quad\dot{\boldsymbol{g}}_2(\tau)=\tfrac{d}{d\tau}\boldsymbol{g}_2(\tau)$$
$$k_{2a}=\frac{(1-\omega^2)E}{(1-\omega^2)^2 4\delta^2\omega^2},\quad k_{2b}=\frac{2\delta\omega_1 E}{(1-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}\tag{8}$$

A_2，B_2 は以下の式を満たす定数である．

$$\begin{pmatrix}A_2\\ B_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{F}_2(0)^{-1}\times\left\{\begin{pmatrix}x_0\\ \dot{x}_0\end{pmatrix}-\boldsymbol{G}_2(\tau_0)\right\}$$

- $\dot{x}=-1$：

$$\begin{pmatrix}\phi_{-on}(\tau;\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{\lambda})\\ \dot{\phi}_{-on}(\tau;\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{\lambda})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(\tau_0)-(\tau-\tau_0)\\ -1\end{pmatrix}\tag{9}$$

解の切換時間は超越方程式をニュートン法を用いることにより求めることができる．

図 6，図 7 にそれぞれアトラクタの例，1 パラメータ分岐ダイアグラムを示す．図 6 (b)，(d) において見られる Type I，Type II の周期窓が見られる近傍の 1 パラメータ分岐ダイアグラムを図 8 に示す．$\alpha\gg1$ のとき，式 (5)，式 (6) が式 (4) の解の挙動を定性的に説明する良きモデルであることが図 3，図 6 より分かる．次章では，理想ダイオード型拘束方程式を用いて分岐現象の解析を行う．

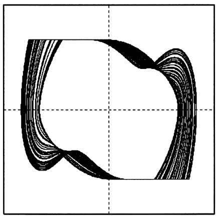
4．ポアンカレ写像の導出

本章では，ポアンカレ写像の導出について説明する．1 対のダイオードが $+on(-on)$ のとき，理想ダイオード型拘束方程式は 1 次元であるので，ポアンカレ写像を 1 次元写像として厳密に導出できる．ここで，ポアンカレ写像を定義するためのいくつかの記号を導入する．τ–x–$\dot{x}$ 空間において 1 対のダイオードが $+on$，off，$-on$ の状態にある三つの部分集合をそれぞれ D^+，D，D^- と定義する．

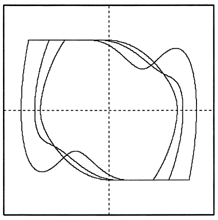
$$D^+=\big\{(\tau,x,\dot{x})\mid\dot{x}=1\big\}$$
$$D=\big\{(\tau,x,\dot{x})\mid|\dot{x}|<1\big\}$$
$$D^-=\big\{(\tau,x,\dot{x})\mid\dot{x}=-1\big\}\tag{10}$$

また，二つの曲線 C^+，C^- を以下のように定義する．

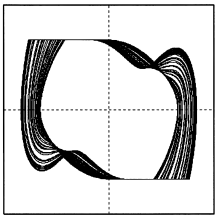
$$C^+=\big\{(\tau,x,\dot{x})\mid x=2\delta+E\sin\omega\tau,\dot{x}=1\big\}$$
$$C^-=\big\{(\tau,x,\dot{x})\mid x=-2\delta+E\sin\omega\tau,\dot{x}=-1\big\}\tag{11}$$



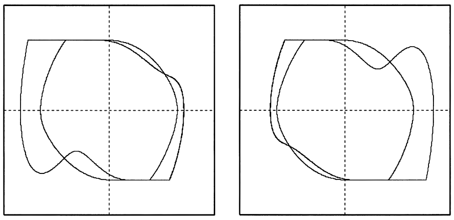
(a) Chaotic attractor ($E = 3.0292$)



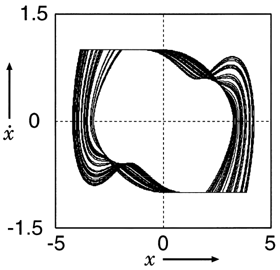
(b) Periodic attractor ($E = 3.0293$)



(c) Chaotic attractor ($E = 3.0301$)

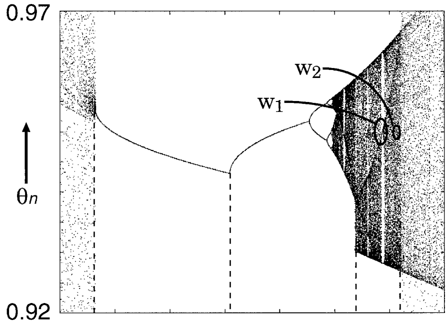


(d) Periodic attractor ($E = 3.030743$)

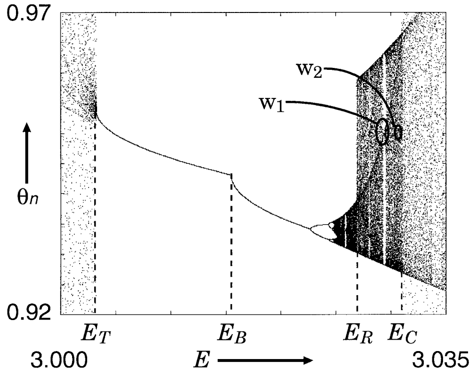


(e) Chaotic attractor ($E = 3.030748$)

図 6　アトラクタ
Fig. 6　Attractors ($\omega = 0.3$, $\delta = 0.3$).

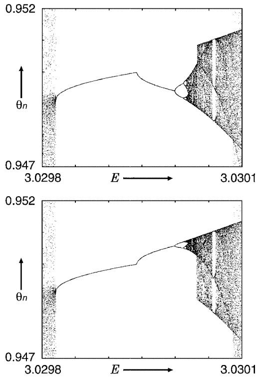


(a)

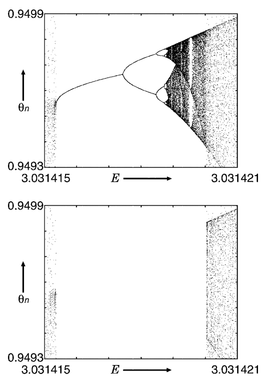


(b)

図 7　1 パラメータ分岐ダイアグラム
Fig. 7　One-parameter bifurcation diagram (ω = 0.3, $\delta = 0.3$).



(a) Periodic window of Type I.



(b) Periodic window of Type II.

図 8　2 種類の周期窓
Fig. 8　Two types of periodic windows ($\omega = 0.3$, δ = 0.3).

C^+ と C^- はそれぞれ式 (6) における，$+on \rightarrow off$ 及び $-on \rightarrow off$ の接続条件を示す．ここで，$C^+ \subset D^+$，$C^- \subset D^-$ である．

図 9 は τ–x–$\dot{x}$ 空間におけるベクトル場の構造を示している．ここで，C^+ に初期値をもつ解について考える．C^+ を出発する解は次の 2 通りに大別される．

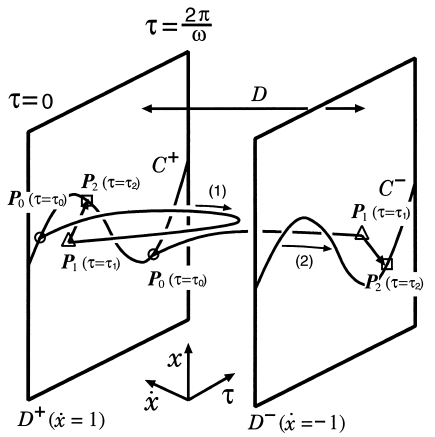


図 9　ベクトル場の構造
Fig. 9　Geometric structure of the vector field.

（1）「○」$(\tau = \tau_0)$ を出発した解は，領域 D を通り，D^+ の「△」$(\tau = \tau_1)$ において $+on$ になる．そして，解は D^+ に拘束されて進み C^+ 上の点「□」$(\tau = \tau_2)$ において再び C^+ を打つ．

（2）「○」$(\tau = \tau_0)$ を出発した解は，領域 D を通り，D^- の「△」$(\tau = \tau_1)$ において $-on$ になる．そして，解は D^- に拘束されて進み C^- 上の点「□」$(\tau = \tau_2)$ において C^- を打つ．

$(\tau, x, \dot{x}) \to (\tau + \pi/\omega, -x, -\dot{x})$ の変換に対し系は不変であるので，C^- 上に初期値をもつ解についても同様の振舞いをする．したがって，ポアンカレ写像 T を以下に示すような 1 次元写像として定義できる．

$$\mathrm{T} : (C^+ \cup C^-) \to (C^+ \cup C^-),\ \theta \mapsto \mathrm{T}(\theta)$$
$$\theta = \begin{cases} \omega\tau_0/2\pi \bmod 1,\ \boldsymbol{P}_0 \in C^+ \\ (\omega\tau_0/2\pi \bmod 1) + 1,\ \boldsymbol{P}_0 \in C^- \end{cases}$$
$$\mathrm{T}(\theta) = \begin{cases} \omega\tau_2/2\pi \bmod 1,\ \boldsymbol{P}_2 \in C^+ \\ (\omega\tau_2/2\pi \bmod 1) + 1,\ \boldsymbol{P}_2 \in C^- \end{cases} \quad (12)$$

ここで，τ_0 は $\boldsymbol{P}_0$ における時刻，τ_2 は戻ってきた点 $\boldsymbol{P}_2$ の時刻を表す．以下に具体的な T の表現を示す．系は対称であるため，$\boldsymbol{P}_0 \subset C^+$ の場合のみを示す．初期値 $\boldsymbol{P}_0$ は以下のように表される．

$$\boldsymbol{P}_0 = (\tau_0, x_0, 1)$$
$$\text{ここで，}\quad x_0 = 2\delta + E\sin\omega\tau_0 \quad (13)$$

初期値 $\boldsymbol{P}_0$ から出発する $\ddot{x}$ の式を $\ddot{\phi}_{off}(\tau; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda})$ とする．式 (5b) より，$\ddot{\phi}_{off}(\tau; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda})$ は以下のように表される．

$$\ddot{\phi}_{off}(\tau; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda}) = 2\delta\dot{\phi}_{off}(\tau; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda}) - \phi_{off}(\tau; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda}) + E\sin\omega\tau \quad (14)$$

ここで，$\dot{\phi}_{off}$ と ϕ_{off} は式 (8) より得られる．

また，$\hat{\tau}_n$ $(\hat{\tau}_n > \tau_0)$ を以下の超越方程式を満たす n 番目の値とする．

$$\ddot{\phi}_{off}(\hat{\tau}_n; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (15)$$

このとき，$\dot{\phi}_{off}(\tau; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda})$ は n が奇数のとき $\tau = \hat{\tau}_n$ で極小値をとり，偶数のとき極大値をとる．領域 D においては δ は正であるため，次のような $\hat{n}$ が存在する．$\tau_0 < \tau < \hat{\tau}_{\hat{n}-1}$ を満たす任意の τ で，$|\dot{\phi}_{off}(\tau; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda})| < 1$ であり，$\tau < \hat{\tau}_{\hat{n}-1}$ で初めて $|\dot{\phi}_{off}(\hat{\tau}_{\hat{n}}; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda})| > 1$ となる．このとき，$|\dot{\phi}_{off}(\tau_1; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda})| = 1$ となる $\hat{\tau}_{\hat{n}-1} < \tau_1 < \hat{\tau}_{\hat{n}}$ を満たす τ_1 が存在し，時刻 τ_1 において $\hat{n}$ が奇数のとき，C^+ を出発した解は D^- を打つ．また，$\hat{n}$ が偶数のとき，C^+ を出発した解は D^+ を打つ．

C^+ を出発した解が D^+ 及び D^- を打つ場所 $\boldsymbol{P}_1$ は以下の式により得られる．

$$\boldsymbol{P}_1 = (\tau_1, x_1, (-1)^{\hat{n}}).$$
$$\text{ここで，}\quad x_1 = \phi_{off}(\tau_1; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda}) \quad (16)$$

ただし，τ_1 は以下の超越方程式を満たす最小の値である．

$$H_1(\tau_1; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda}) = 0.$$
$$\text{ここで，}\quad H_1(\tau_1; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda}) \equiv |\dot{\phi}_{off}(\tau_1; \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{\lambda})| - 1 \quad (17)$$

解が D^+ 及び D^- を打つ場所 P_2 は以下の式により得られる．

$$\boldsymbol{P}_2 = (\tau_2, x_2, (-1)^{\hat{n}}).$$
$$\text{ここで，}\quad x_2 = (-1)^{\hat{n}}2\delta + E\sin\omega\tau_2 \quad (18)$$

ただし，τ_2 は以下の超越方程式の解である．

$$H_2(\tau_2; \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{\lambda}) = 0$$

ここで，

$$H_2(\tau_2; \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{\lambda}) \equiv \begin{cases} \phi_{+on}(\tau_2; \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{\lambda}) + 2\delta - E\sin\omega\tau_2 \\ \qquad \hat{n}: \text{偶数} \\ \phi_{-on}(\tau_2; \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{\lambda}) - 2\delta - E\sin\omega\tau_2 \\ \qquad \hat{n}: \text{奇数} \end{cases} \quad (19)$$

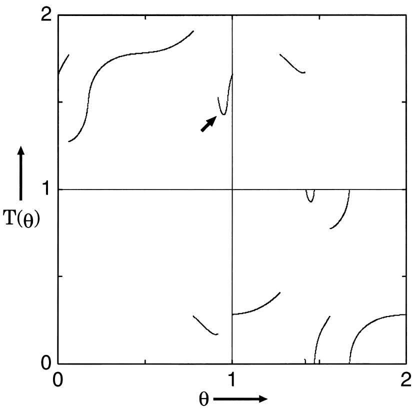


図 10　ポアンカレ写像
Fig. 10　Poincaré map T (ω = 0.3,δ = 0.3,E = 3.025).

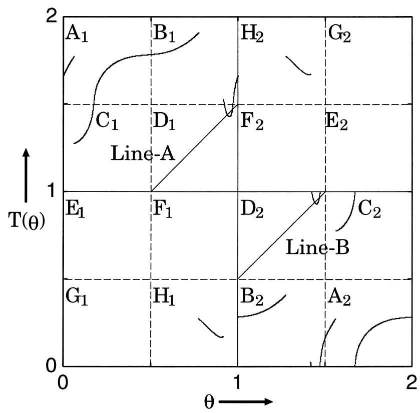


図 11　ポアンカレ写像
Fig. 11　Poincaré map T (ω = 0.3,δ = 0.3,E = 3.025).

超越方程式 H_1，H_2 はニュートン法によって解いた．得られたポアンカレ写像の例を図 10 に示す．

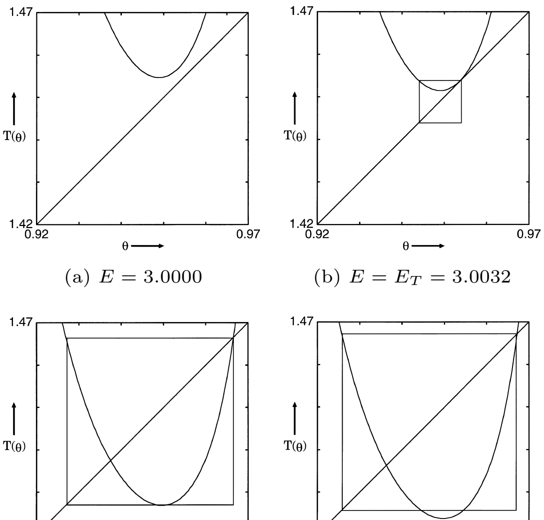
5. ポアンカレ写像の解析

本章では，図 8 で示した 2 種類の周期窓について解析する．$(\tau, x, y) \to (\tau + \pi/\omega, -x, -y)$ の変換に対し式 (5) は不変であるので，ポアンカレ写像について以下の関係式が成り立つ．

$$\mathrm{T}\left\{\frac{3}{2} - \theta + 2\left(\theta \bmod \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{3}{2} - \mathrm{T}(\theta) + 2\left(\mathrm{T}(\theta) \bmod \frac{1}{2}\right) \tag{20}$$

この関係式は図 11 において，A_1 と A_2，B_1 と B_2，$\cdots$，G_1 と G_2 が同じ形状をしていることを表している．これがこの写像に見られる対称性である．

周期窓は図 10 の矢印近傍に生じるため，ここのポアンカレ写像の形状に注目する．解析のため図 11 のように補助線 Line-A を描く．これは $\mathrm{T}(\theta) = \theta + 0.5$ を表す．図 12 に矢印近傍の写像の拡大図を示す．図 12 (a) の状態からパラメータ E を増加させ，$E = E_T$ のとき図 12 (b) のように補助線と写像が接する．一方，Line-B を $\mathrm{T}(\theta) = \theta - 0.5$ とすると，式 (20) で示される系の対称性により，図 13 のように写像は Line-B 上で同じ形状となる．以下，写像が Line-A と Line-B と交差している場合を対象とする．さて，図 13 (a) のように Line-A と T の交点を $\theta = \beta$ とする．β より小さい θ で $\mathrm{T}(\beta)$ と同じ値をとる点を $\theta = \alpha$ とする．このとき，区間 I を I$= [\alpha, \beta] \subset D^+$ と定義する．また，図 13 (b) のように Line-B と T の交点を $\theta = \sigma$ とする．σ より小さい θ で $\mathrm{T}(\sigma)$ と同じ値をとる点を $\theta = \gamma$ とする．このとき，区間 I′ を $\mathrm{I}' = [\gamma, \sigma] \subset D^-$ と定義する．このとき式 (20) より以下の関係が成り立つ．



(a) $E = 3.0000$　(b) $E = E_T = 3.0032$
(c) $E = E_C = 3.0310$　(d) $E = 3.0350$

図 12　ポアンカレ写像の拡大図
Fig. 12　Magnified picture of Poincaré map T.

$$\gamma = \left\{\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \bmod 1\right\} + 1,$$

$$\sigma = \left\{\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \bmod 1\right\} + 1,$$

$$\alpha = \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \bmod 1, \quad \beta = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \bmod 1 \tag{21}$$

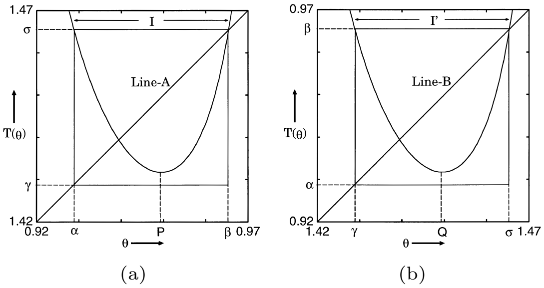


図 13　ポアンカレ写像の拡大図
Fig. 13　Magnified picture of Poincaré map T (E = 3.025).

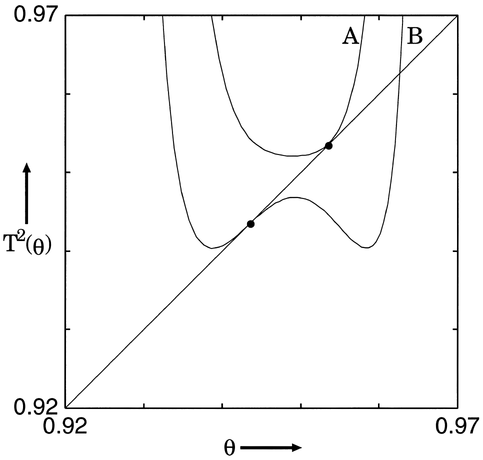


図 14　ポアンカレ写像の 2 回合成写像
Fig. 14　Composite map T^2(A: $E = E_T = 3.0032$, B: $E = E_B = 3.0150$).

図 13 (a) のように，T が極値をとる θ の値を P とする．$\gamma \leq \mathrm{T(P)} \leq \sigma$ であるので $\mathrm{T(I)} \subset \mathrm{I}'$ となる．同様に，$\mathrm{T(I')} \subset \mathrm{I}$ が成り立つ．このとき，$\mathrm{T}^2(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ であるので，I 及び I' は T^2 に関して不変区間となる．したがって，このパラメータ近傍において周期窓が発生する．

図 14，図 15，図 16，図 17 にポアンカレ写像の 2 回合成写像の例を示す．図 7 で見られる現象はこのポアンカレ写像の 2 回合成写像を用いて説明できる．まず，$E = E_T = 3.0032$ のとき図 14 の A のように接線分岐が生じ周期点が発生する．パラメータ E を増加させ $E = E_B = 3.0150$ のとき図 14 の B のように対称性破壊分岐が生じ，図 15 のように不変区間 I の内部に不変区間 J，J' が生じ 2 種類の周期解が発生する．図 15 においてポアンカレ写像の 2 回合成写像はロジスティック写像の 2 回合成写像のような形状をし

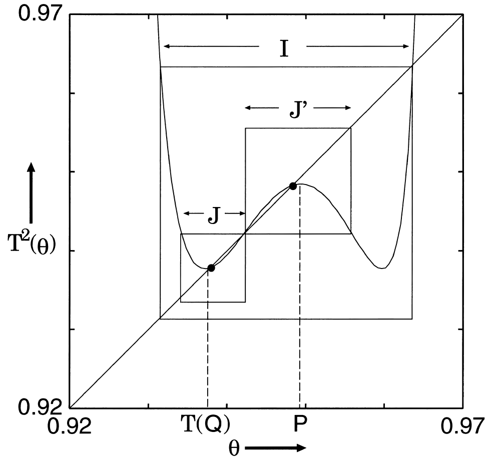


図 15　ポアンカレ写像の 2 回合成写像
Fig. 15　Composite map T^2(E = 3.018).

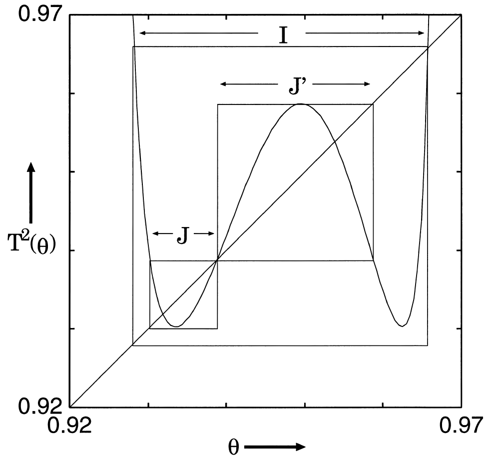


図 16　ポアンカレ写像の 2 回合成写像
Fig. 16　Composite map T^2($E = E_R = 3.0268$).

ているが，写像の頂点はそれぞれ $\theta = \mathrm{P}$，$\theta = \mathrm{T(Q)}$ であるので，それぞれの周期点は異なる周期点である．パラメータ E を増加させると，J 上及び J' 上ではそれぞれの不変区間において周期倍分岐が連鎖的に生じカオスが発生する．パラメータを増加させ $E = E_R = 3.0268$ のとき，図 16 のように写像の頂点が不変区間 J，及び J' を飛び出すことで symmetry recovering crisis [5] が発生し，この周期窓は消滅する．更にパラメータを増加させ，$E = E_C = 3.031$ のとき，図 17 のように写像の頂点が不変区間 I を飛び出すことで interior crisis [5] が発生し，この不変区間は消滅する．

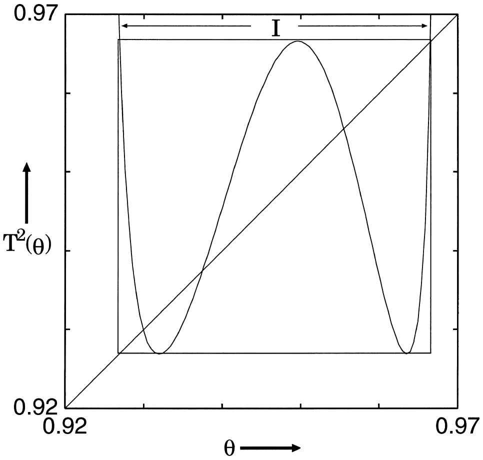
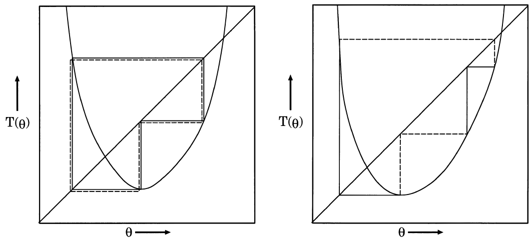


図 17 ポアンカレ写像の 2 回合成写像
Fig. 17 Composite map $T^2(E = E_C = 3.031)$.

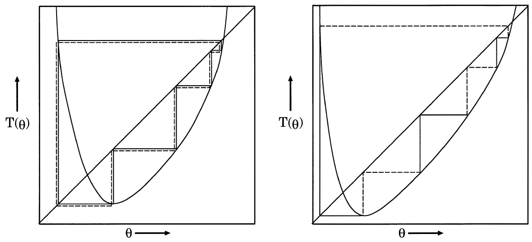
6. 連鎖的に発生する周期窓

写像の頂点近傍が周期点となるとき周期窓が発生する．パラメータを増加させ，図 12 (b) のように写像が補助線に接する状態から図 12 (c) のように crisis [5] となるまでに，図 18 のように Type I と Type II の周期窓が交互に可算無限個発生することが [4] で証明されている．ここではその概要を説明する．説明のため図 18 では，I 上の写像と I′ 上の写像を誇張して描いた．この区間において写像は同一な形状をしているため，図上では写像を重ねて描いた．頂点近傍を出発する解について考える．図 18 (a) の場合，すなわち Type I の 2×3 周期窓が発生するパラメータ近傍では，写像の頂点が周期点となり，Type I の周期窓が発生する．ここで，実線は I 上での遷移を表し，破線は I′ 上での遷移を表す．次に，図 18 (b) では Type II の $2 \times 4/2$ 周期窓が発生する．ここで，実線は I 上での遷移を表し，破線は I′ 上での遷移を表す．このようにして，図 18 (c)，(d) におけるように Type I の周期窓と Type II の周期窓が交互に次々と発生する．すなわち，式 (22) の順序で周期窓が発生する．

式 (22) に示した繰込み則に従って発生する周期窓のパラメータ値が，ある不変定数と関係があることを



(a) 2×3 periodic window (Type I).
(b) 2×4/2 periodic window (Type II).



(c) 2×5 periodic window (Type I).
(d) 2×6/2 periodic window (Type II).

図 18 連鎖的に発生する周期窓
Fig. 18 Periodic window generated successively.

示す．ここで，写像の頂点が図 18 のように周期点となるときのパラメータに注目する．

式 (23) のような定数 δ_n を考える．ここで，$E_{w(n)}$ は写像の頂点が周期点となり，$2 \times n$ 周期の Type I の周期窓，及び，$2 \times n/2$ 周期の Type II の周期窓が発生する場合のパラメータを示している．

$$\delta_n = \frac{E_{w(n+1)} - E_{w(n)}}{E_{w(n+2)} - E_{w(n+1)}} \tag{23}$$

計算機実験の結果，表 1 におけるような δ_n の値が得られた．この表から δ_n はおよそ 6.995 に収束している．Nishio らが行った自励系における不変定数の値は $3.0654\cdots$ だった [4]．本論文では，異なる値に収束した．

定性的な説明であるが，本研究で得られた不変定数が自励系の場合の不変定数より大きかったということは，図 18 のようにパラメータ変化に対しポアンカレ写像の形状が険しくなりやすいことを表していると考えられる．筆者らの経験では，理想ダイオード型拘束

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
\text{Type I} & : & 2\times 3 & & 2\times 5 & & \cdots & & 2\times n & & & \cdots & \\
 & & & \searrow \ \nearrow & & \searrow \ \nearrow & \cdots & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \cdots \\
\text{Type II} & : & & 2\times 4/2 & & 2\times 6/2 & & \cdots & & 2\times (n+1)/2 & & & \cdots
\end{array} \tag{22}$$

表 1　δ_nの計算結果
Table 1　Calculation result of δ_n.

n	δ_n
3	7.28183377094
4	7.07287842761
5	7.01156989795
6	6.99820262578
7	6.99561722265
8	6.99514781957

方程式によって表される 3 次元自励系 [13]〜[15] と 2 次元強制系 [16], [17] においては，強制系の方がはるかにたやすくカオスを観察することができた．

7. む　す　び

本論文では理想ダイオードを含む強制レイリー発振器を解析し，強制系においても 2 種類の周期窓が可算無限個発生することを示した．また，自励系において Nishio らが求めた不変定数とは異なった結果が得られることを明らかにした．本論文では，理想ダイオードを含む周期窓と不変定数について解析したが，Kawakami の方法 [18] を用いることにより一般的な回路に見られる対称性と対称性の繰込みを調べることが今後の興味深い研究課題と考えられる．

文　　献

[1] T. Matsumoto and L.O. Chua, “The double scroll,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-32, no.8, pp.797–818, 1985.

[2] L.O. Chua, M. Komuro, and T. Matsumoto, “The double scroll family,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-33, no.11, pp.1072–1118, 1986.

[3] T. Matsumoto, L.O. Chua, and R. Tokunaga, “Chaos via torus breakdown,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-34, no.3, pp.240–253, 1987.

[4] Y. Nishio, N. Inaba, S. Mori, and T. Saito, “Rigorous analyses of windows in a symmetric circuit,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.37, no.4, pp.473–487, 1990.

[5] M. Kitano, T. Yabuzaki, and T. Ogawa, “Symmetry—recovering crises of chaos in polarization—related optical bistability,” Phys. Rev. A, Gen. Phys., vol.29, no.3, pp.1288–1296, 1984.

[6] M.L. Cartwright and J.E. Littlewood, “On nonlinear differential equations of second order, I: The equation $\ddot{y} + k(1-y^2)\dot{y} + y = b\lambda k\cos(\lambda t + a)$, k large,” J. Lond. Math. Soc., vol.20, pp.180–189, 1945.

[7] N. Levinson, “A second order differential equation with singular solutions,” Ann. Math., vol.50, pp.127–153, 1949.

[8] M. Levi, “Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations,” Mem. Amer. Math. Soc., vol.32, no.244, pp.1–147, 1981.

[9] P.J. Holms and D.A. Rand, “Bifurcations of the forced van der Pol oscillator,” Q. Appl. Math., vol.35, pp.495–509, 1978.

[10] 上田　亮，赤松則男，林　千博，“非線形常微分方程式の計算機シミュレーションと非周期振動,” 信学論（A），vol.56-A, no.4, pp.218–225, April 1973.

[11] T. Endo and T. Saito, “Chaos in electrical and electronic circuits and systems,” IEICE Trans., vol.E73, no.6, pp.763–771, June 1990.

[12] N. Inaba and S. Mori,“Chaos via torus breakdown in a piecewise-linear forced van der Pol oscillator with a diode,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.38, no.4, pp.398–409, 1991.

[13] N. Inaba, T. Saito, and S. Mori, “Chaotic phenomena in a circuit with a negative resistance and an ideal diode,” IEICE Trans., vol.E70, no.8, pp.744–754, Aug. 1987.

[14] N. Inaba and S. Mori, “Chaotic phenomena in a circuit with a diode due to the change of the oscillation frequency,” IEICE Trans., vol.E71, no.9, pp.842–849, Sept. 1988.

[15] 稲葉直彦，斉藤利通，“ダイオードを含むある 3 次元自励振動回路族におけるカオス発生の物理的メカニズムに関する考察,” 信学論（A），vol.J74-A, no.12, pp.1766–1773, Dec. 1991.

[16] N. Inaba and S. Mori, “Chaos via torus breakdown in a piecewise-linear forced van der Pol oscillator with a diode,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-38, no.4, pp.398–409, 1991.

[17] N. Inaba and S. Mori, “Folded torus in the forced Rayleigh oscillator with a diode pair,” IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol.39, no.5, pp.402–411, 1992.

[18] H. Kawakami, “Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: Computation of bifurcation values of the system parameters,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-31, no.3, pp.248–260, 1984.

（平成 15 年 7 月 10 日受付，10 月 2 日再受付，
16 年 1 月 7 日最終原稿受付）

関川　宗久　（学生員）

2000 宇都宮大・工・情報卒．2002 同大大学院博士前期課程了．同年同大学院博士後期課程入学，現在に至る．非線形回路に見られる分岐現象に関する研究に従事．

三好　徹哉　（正員）

1996 宇都宮大・工・情報卒．1998 同大大学院博士前期課程了．2001 同大学院博士後期課程満期退学．現在，栃木県産業技術センター高度技術専門研究員，宇都宮大大学院研究生．主として非線形回路解析に関する研究に従事．博士（工学）．第 10 回 回路とシステム（軽井沢）ワークショップ奨励賞受賞．

西尾　芳文　（正員）

1988 慶大・理工・電気卒．1993 同大大学院博士課程了．同年，徳島大・工・電気電子勤務．現在，同大・工・電気電子助教授．博士（工学）．非線形回路におけるカオスの解析と応用，結合発振回路の同期現象の解析，セルラニューラルネットワークの設計と応用，非線形回路の解析アルゴリズムの開発に関する研究に従事．IEEE 会員．

稲葉　直彦　（正員）

1984 慶大・理工・電気卒．1989 同大大学院博士課程了．同年宇都宮大・工・助手．1994 同大助教授，現在に至る．工博．非線形回路解析，ディジタル通信方式に関する研究に従事．第 7 回 回路とシステム（軽井沢）ワークショップ奨励賞受賞．