

二つのダイオードを含む4次元自励振動回路に発生するカオス

正 員 西尾 芳文<sup>†</sup>      正 員 稲葉 直彦<sup>††</sup>      正 員 森 真作<sup>†</sup>

Chaos in a Four-Dimensional Autonomous Circuit with Two Diodes

Yoshifumi NISHIO<sup>†</sup>, Naohiko INABA<sup>††</sup> and Shinsaku MORI<sup>†</sup>, Members

あらまし 本論文では、二つの微小パラメータを含む拘束方程式によって表されるある4次元自励振動回路を提案し、この回路に発生するカオス現象を厳密に解析している。この回路は、2個のダイオードを含んでおり、ダイオードのON抵抗が微小パラメータに対応している。ここでは、ダイオードのON抵抗が0であるような理想的な場合について考える。この場合、回路方程式は区分的に2次元の方程式によって表され、ポアンカレ写像は1次元写像として導出される。この写像の形状はlogistic map的であり、これによって回路実験において観察される周期倍分岐、カオスなどの現象の発生が厳密に説明されている。

1. ま え が き

カオスの研究は自然科学のさまざまな分野で盛んであり、電気工学の分野においてもさまざまなカオス発生回路が提案され解析がなされている。特に、3次元自励振動回路におけるカオスにおいては、その発生のメカニズムが理論的に明らかにされつつある。これらの最も有効的なアプローチの一つは、微小パラメータ  $\varepsilon$  を含む拘束方程式を用いる方法である。この方法は、例えば3次元自励振動回路に発生する多くのカオスが平たい平板のような形状をしていることに着目したもので、 $\varepsilon \rightarrow 0$  において得られる縮退した方程式によってカオスの発生するメカニズムを明らかにしている。例えば、斎藤と筆者らは、ダイオードを含む3次元自励振動カオス発生回路について、ダイオードの素子特性を理想化することにより拘束方程式を導き、logistic map カオスが発生することを厳密に示した<sup>(1)~(4)</sup>。

一方、高次元系に発生するカオス現象が近年注目を集めている。高次元系においては、ハイパカオスなど3次元自励振動系には生じない現象が発生する場合もあるが<sup>(5)~(7)</sup>、比較的次元の低いカオスが数多くの系に発生することが報告されている。例えば、遠藤が解析した二つの発振器の結合系に生じるカオスの次元は3

より小さく<sup>(8),(9)</sup>、また、ヤリイカの神経を記述するHodgkin-Huxleyの方程式に発生するカオス現象は近似1次元写像によって説明されることが示されている<sup>(10)</sup>。このような事実は、これらの現象の本質がより簡略化されたモデルにおいて説明され得ることを示唆しているものと考えられる。

高次元系に生じる現象のメカニズムを明らかにするための一つのアプローチとしては、拘束方程式を用いる積極的な系の理想化および簡略化を行っていくことが考えられる。特に、高次元系に生じるアトラクタ次元の低い現象を解析する場合には、複数の微小パラメータを含む拘束方程式と対応づけて議論し、微小パラメータの物理的意味と有効性を明らかにしていくことは極めて重要かつ興味深い問題となると考えられる。

本論文では、2個のダイオードを含む4次元自励振動回路に発生するカオス現象を厳密に解析している。これらの2個ダイオードは2個のキャパシタにそれぞれ並列接続されており、ダイオードのON抵抗が大変小さいとみなした場合、回路方程式は二つの微小パラメータ  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  を含む拘束方程式によって表される。ここで、筆者らが提案した、ダイオードを理想的なスイッチとみなす方法を適用する。これは、拘束方程式において、 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)$  の極限に対応しており、この場合、回路方程式は、ダイオードのしきい値電圧を拘束面とする理想化された方程式によって表される。特に二つのダイオードがともにONであるような領域では、回路方程式は2次元の方程式によって記述され、ポアンカレ写像は1次元写像として導出される。この

<sup>†</sup> 慶応義塾大学理工学部電気工学科, 横浜市  
Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama-shi, 223 Japan

<sup>††</sup> 宇都宮大学工学部情報工学科, 宇都宮市  
Faculty of Engineering, Utsunomiya University, Utsunomiya-shi, 321 Japan

写像は logistic map<sup>(11),(12)</sup>のような形状をしており、周期倍分岐によってカオスが発生することを厳密に説明することができる。更に、 $(\epsilon_1, \epsilon_2) \rightarrow (0, 0)$ における方程式のベクトル場の構造を理論的に解析し、理想化の妥当性を明らかにしている。

本論文の結果は、複数の微小パラメータを含む拘束方程式を用いるアプローチが、高次元系に生じるカオス等の現象の解析に極めて有効であることを示唆しているものと考えられる。

## 2. 回路モデル

図1に回路モデルを示す。本回路は、メモリ素子四つ、線形負性抵抗一つ、そして非線形素子として二つのキャパシタと並列に二つのダイオードを含む。キャパシタ  $C_1, C_2$  の両端の電圧をそれぞれ  $v_1, v_2$ 、インダクタ  $L_1, L_2$  を流れる電流をそれぞれ  $i_1, i_2$  とする。

まず、二つのダイオードの  $v$ - $i$  特性を次式の2領域区分線形関数で近似する (図2参照)。

$$\begin{aligned} i_{d1}(v_1) &= \frac{G_1}{2}(v_1 - V + |v_1 - V|) \\ i_{d2}(v_2) &= \frac{G_2}{2}(v_2 - V + |v_2 - V|) \end{aligned} \quad (1)$$

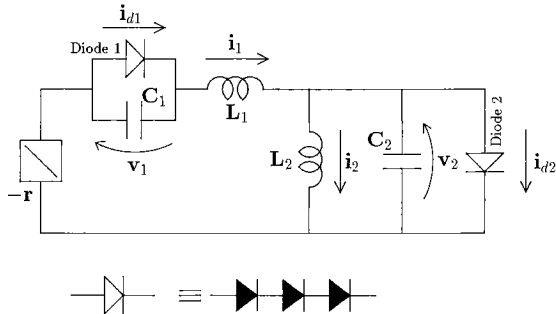


図1 回路モデル  
Fig. 1 Circuit model.

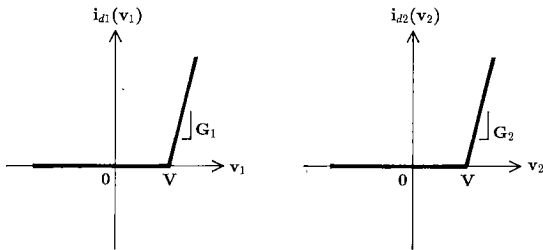


図2 ダイオードの特性の区分線形近似  
Fig. 2 Approximated  $v$ - $i$  characteristics of diodes.

このとき、回路方程式は、次の4次元区分線形常微分方程式によって表される。

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= i_1 - i_{d1}(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= i_1 - i_2 - i_{d2}(v_2) \\ L_1 \frac{di_1}{dt} &= -v_1 - v_2 + r i_1 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} &= v_2 \end{aligned} \quad (2)$$

変数変換

$$\begin{aligned} v_1 &= Vx, \quad v_2 = Vy, \quad i_1 = \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} Vz \\ i_2 &= \frac{C_2}{\sqrt{L_1 C_1}} Vw, \quad t = \sqrt{L_1 C_1} \tau, \quad \dots = \frac{d}{d\tau} \\ \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \frac{1}{G_1} &= \epsilon_1, \quad \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \frac{1}{G_2} = \epsilon_2, \\ \frac{C_1}{C_2} &= \alpha, \quad \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} r = \beta, \quad \frac{L_1 C_1}{L_2 C_2} = \gamma \end{aligned} \quad (3)$$

により、式(1)は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z - \frac{1}{2\epsilon_1}(x - 1 + |x - 1|) \\ \dot{y} &= \alpha z - w - \frac{\alpha}{2\epsilon_2}(y - 1 + |y - 1|) \\ \dot{z} &= -x - y + \beta z \\ \dot{w} &= \gamma y \end{aligned} \quad (4)$$

となる。式(4)は五つのパラメータを含むが、ダイオードがオンであるときの抵抗は極めて小さいので  $\epsilon_1, \epsilon_2$  は微小パラメータと考えることができることに注意する。

図3に式(4)を解いて得られたカオス的アトラクタの例を示す。図3(a)は  $x$ - $y$  平面への投影図、(b)は  $z$ - $w$  平面への投影図である。各パラメータは  $(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon_1, \epsilon_2) = (1.24, 0.696, 0.99, 0.0057, 0.0057)$  である。ここで微小パラメータの値は実際のダイオードの特性を測定して得られたものである。

## 3. ダイオードを理想化したモデル

連続系におけるカオスの解析は、現在のところ写像法がその常套手段となっているが、この場合、解析すべき2次元以上の離散力学系に対する数学的議論が十分なものではないためにカオス発生 of 証明は大変困難なものとなっている。

そこで、本論文では、図1の回路に発生する現象を以下に示す理想化されたモデルによって解析する。ここで理想化とは回路に含まれる2個のダイオードが図

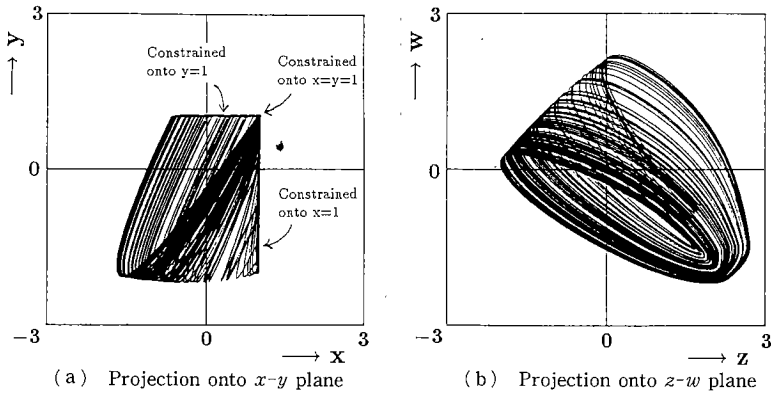


図3 式(4)より得られたカオス的アトラクタ  
Fig. 3 Chaotic attractor from Eq. (4).

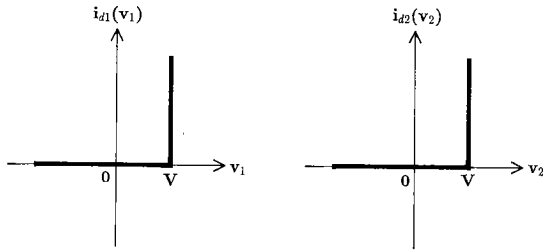


図4 ダイオードの特性の理想化  
Fig. 4 Idealized  $v$ - $i$  characteristics of diodes.

4に示すような理想的なスイッチとして動作することを意味し、これは式(4)において2個の微小パラメータが、 $(\epsilon_1, \epsilon_2) \rightarrow (0, 0)$ である場合に対応する。このような理想化を考慮したモデルの解析は式(4)を直接解析するのに比べ極めて簡単になる。

まず、理想モデル定義を与える。

[理想モデルの定義]

(1) ダイオードはONあるいはOFFのいずれかの状態をとる。

(2) ダイオードはON状態のとき電圧 $V$ の定電圧源として動作する。但し、このときダイオードに流れる電流は順方向、すなわち電力を消費する方向に流れるものとする。

(3) ダイオードはOFF状態のとき開放として動作する。但し、このときダイオードにかかる電圧は $V$ より小さいものとする。

(4) ダイオードがON状態の場合、ダイオードに流れる電流が0になったとき、ダイオードはONからOFFに切り換わる。

(5) ダイオードがOFF状態の場合、ダイオード

にかかる順方向の電圧が $V$ に達したとき、ダイオードはOFFからONに切り換わる。

(6) 上記(4)、(5)の遷移条件の前後においてすべてのキャパシタの電荷、インダクタの磁束は連続である。

系の解析において、ダイオードを理想化することの要点は、ダイオードがONのとき、ダイオードを定電圧源とみなすことにある。この場合、状態変数であるキャパシタの両端の電圧がダイオードのしきい値電圧に拘束されるため、それぞれのダイオードがONであることに對し、回路方程式は1次元ずつ縮退することになる。

定義によって、式(4)の回路方程式は以下のように簡略化される。

[理想モデル]

(領域1)  $x=1, y=1$  (ダイオード1ON, 2ON)のとき、

$$\dot{z} = \beta z - 2$$

$$\dot{w} = \gamma$$

(領域2)  $x=1, y < 1$  (ダイオード1ON, 2OFF)のとき、

$$\dot{y} = \alpha z - w$$

$$\dot{z} = -y + \beta z - 1$$

$$\dot{w} = \gamma y$$

(領域3)  $x < 1, y=1$  (ダイオード1OFF, 2ON)のとき、

$$\dot{x} = z$$

$$\dot{z} = -x + \beta z - 1$$

$$\dot{w} = \gamma$$

(領域4)  $x < 1, y < 1$  (ダイオード1OFF, 2OFF)

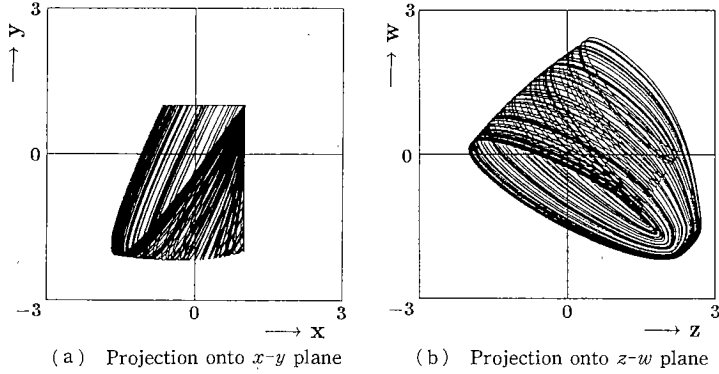


図5 理想モデルより得られたカオスのアトラクタ  
Fig. 5 Chaotic attractor from the Ideal Model.

のとき、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z \\ \dot{y} &= az - w \\ \dot{z} &= -x - y + \beta z \\ \dot{w} &= \gamma y \end{aligned} \quad (5)$$

領域1では2次元に、領域2, 3では3次元に系は簡略化されており、各領域の解は次の遷移条件によって接続される。

$$\begin{aligned} \text{領域1} \rightarrow \text{領域2} : az = w, \quad \text{領域2} \rightarrow \text{領域1} : y = 1, \\ \text{領域1} \rightarrow \text{領域3} : z = 0, \quad \text{領域3} \rightarrow \text{領域1} : x = 1, \\ \text{領域2} \rightarrow \text{領域4} : z = 0, \quad \text{領域4} \rightarrow \text{領域2} : x = 1, \\ \text{領域3} \rightarrow \text{領域4} : az = w, \quad \text{領域4} \rightarrow \text{領域3} : y = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、例えば領域2→領域1の遷移条件は、ダイオード2の両端の電圧がしきい値電圧に達することに対応し、領域1→領域2の遷移条件は、ダイオード2を流れる電流が0になることに対応する。ON状態のダイオードを流れる電流は式(2)で  $dv_1/dt=0$ ,  $dv_2/dt=0$  とおくことによって得られる。この理想モデルの解は遷移条件に基づき正の時刻に対してのみ接続されることに注意する。

図5に式(5)を解いて得られるカオスのアトラクタの例を示す。パラメータ、 $a, \beta, \gamma$ は図3の場合と同じ値を用いた。式(4)を解いて得られた結果と定性的に一致した結果が得られている。

#### 4. 理想モデルの妥当性

本章では、前章で導出した理想モデルの妥当性を理論的に確認する。具体的には、もとの微分方程式(4)の各線形領域でのベクトル場の構造が、二つの微小パラメータを0にした極限で、理想モデル(5)のそれに

収束することを示す。

[定理1] 微分方程式(4)が、各線形領域で以下のような固有値をもつような場合を対象とする。

領域1: 4実固有値  $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}$ ,

領域2: 2実固有値  $\lambda_{21}, \lambda_{22}$  と1対の複素共役固有値  $\sigma_2 \pm j\omega_2$ ,

領域3: 2実固有値  $\lambda_{31}, \lambda_{32}$  と1対の複素共役固有値  $\sigma_3 \pm j\omega_3$ . (7)

(実際、図3で得られるカオスのアトラクタのパラメータの値はこの領域にある。)

上記の固有値に対応する固有空間を次の記号を用いて表す。

領域1:  $\lambda_{13} \rightarrow E_{13}, \lambda_{14} \rightarrow E_{14}$

領域2:  $\lambda_{22} \rightarrow E_{22}, \sigma_2 \pm j\omega_2 \rightarrow E_2$

領域3:  $\lambda_{32} \rightarrow E_{32}, \sigma_3 \pm j\omega_3 \rightarrow E_3$  (8)

また、以下の部分空間を定義する。

$E_\alpha : E_{13}$  と  $E_{14}$  によってはられる2次元部分空間

$E_\beta : E_{22}$  と  $E_2$  によってはねられる3次元部分空間

$E_\gamma : E_{32}$  と  $E_3$  によってはねられる3次元部分空間 (9)

更に、理想モデルの各領域の固有方程式

領域1:  $m(m-\beta)=0$

領域2:  $m^3 - \beta m^2 + (\alpha + \gamma)m - \beta\gamma = 0$

領域3:  $m(m^2 - \beta m + 1) = 0$  (10)

の根を

領域1:  $0, \beta$

領域2:  $\hat{\lambda}_{22}, \hat{\sigma}_2 \pm j\hat{\omega}_2$

領域3:  $0, \hat{\sigma}_3 \pm j\hat{\omega}_3$  (11)

とおく、このとき以下が成り立つ。

$$\lim_{(\epsilon_1, \epsilon_2) \rightarrow (0, 0)} \lambda_{11} = -\infty, \quad \lim_{(\epsilon_1, \epsilon_2) \rightarrow (0, 0)} \lambda_{12} = -\infty$$

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \lambda_{13} = 0, \quad \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \lambda_{14} = \beta \quad (12)$$

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \lambda_{21} = -\infty, \quad \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \lambda_{22} = \hat{\lambda}_{22} \quad (13)$$

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \sigma_2 = \hat{\sigma}_2, \quad \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \omega_2 = \hat{\omega}_2 \quad (13)$$

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \lambda_{31} = -\infty, \quad \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \lambda_{32} = 0 \quad (14)$$

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \sigma_3 = \hat{\sigma}_3, \quad \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \omega_3 = \hat{\omega}_3 \quad (14)$$

すなわち、各領域の固有値のいくつかは理想モデルのそれに収束し、他は $-\infty$ に発散する。更に、

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} E_\alpha = \{(x, y, z, w) | x=1, y=1\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \{E_\alpha \cap (x=1)\} \\ & = \{(x, y, z, w) | x=1, y=1, z=0\} \\ & \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \{E_\alpha \cap (y=1)\} \\ & = \{(x, y, z, w) | x=1, y=1, az=w\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} E_\beta = \{(x, y, z, w) | x=1\}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \{E_\beta \cap (x=1)\} \\ & = \{(x, y, z, w) | x=1, az=w\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} E_\gamma = \{(x, y, z, w) | y=1\}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)} \{E_\gamma \cap (y=1)\} \\ & = \{(x, y, z, w) | y=1, z=0\} \end{aligned} \quad (18)$$

定理の証明は付録に記す。

上式の意味は以下のものである。例えば、領域4から領域2に入る解について考えると、空間 $E_\beta$ は $x=1$ に一致し、 $E_\beta$ に解が拘束される度合を表す $\lambda_{21}$ は $-\infty$ となるから、この解は境界面 $x=1$ に拘束されることになる。この拘束された解が再び領域4に戻る場合について考えると、解は $E_\beta$ に拘束されているから、 $E_\beta$ と $x=1$ の交線（これは2次元空間である）上から領域4に入ると考えられ、この交線は式(6)の遷移条件と一致している。従って、 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)$ では、解がダイオードのしきい値電圧に達するとダイオードはONになり解はこのしきい値電圧に拘束され、ダイオードを流れる電流が0となるとダイオードはOFFになる。これによって、解の挙動が理想モデルによって説明できることが理論的に示された。

## 5. ベクトル場の構造

以下の議論では、式(5)の理想モデルの各領域の固有値が式(11)、および次式で表される場合を対象とする。

$$\text{領域 4: } \bar{\sigma}_{41} \pm j\hat{\omega}_{41}, \quad \bar{\sigma}_{42} \pm j\hat{\omega}_{42} \quad (19)$$

まず、以下のように部分空間を定義する。

$$D_1 = \{(x, y, z, w) | x=y=1\}$$

$$D_2 = \{(x, y, z, w) | x=1, y < 1\}$$

$$D_3 = \{(x, y, z, w) | x < 1, y=1\}$$

$$D_4 = \{(x, y, z, w) | x < 1, y < 1\} \quad (20)$$

これらの部分空間は、それぞれ領域1、領域2、領域3、領域4に対応している。

このとき、各領域での厳密解は以下ようになる。

•  $D_1$  における解、

$$z = \left( z_0 - \frac{2}{\beta} \right) \exp \beta \tau + \frac{2}{\beta}$$

$$w = \gamma \tau + w_0 \quad (21)$$

•  $D_2$  における解、

$$\begin{bmatrix} y \\ z - \frac{1}{\beta} \\ w - \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} = F_2(\tau) \times F_2^{-1}(0) \times \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 - \frac{1}{\beta} \\ w_0 - \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}$$

但し

$$F_2(\tau) = \begin{bmatrix} f_{2y}(\tau) \\ f_{2z}(\tau) \\ f_{2w}(\tau) \end{bmatrix}, \quad f_{2w}(\tau) = \begin{bmatrix} \exp \hat{\lambda}_{22} \tau \\ \exp \bar{\sigma}_2 \tau \cos \hat{\omega}_2 \tau \\ \exp \bar{\sigma}_2 \tau \sin \hat{\omega}_2 \tau \end{bmatrix}^T$$

$$f_{2y}(\tau) = \frac{1}{\gamma} \frac{df_{2w}(\tau)}{d\tau}, \quad f_{2z}(\tau) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{df_{2y}(\tau)}{d\tau} + f_{2w}(\tau) \right\} \quad (22)$$

•  $D_3$  における解、

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ z \end{bmatrix} = F_3(\tau) \times F_3^{-1}(0) \times \begin{bmatrix} x_0+1 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$w = \gamma \tau + w_0$$

但し

$$F_3(\tau) = \begin{bmatrix} f_{3x}(\tau) \\ f_{3z}(\tau) \end{bmatrix}$$

$$f_{3x}(\tau) = \begin{bmatrix} \exp \bar{\sigma}_3 \tau \cos \hat{\omega}_3 \tau \\ \exp \bar{\sigma}_3 \tau \sin \hat{\omega}_3 \tau \end{bmatrix}^T, \quad f_{3z}(\tau) = \frac{df_{3x}(\tau)}{d\tau} \quad (23)$$

•  $D_4$  における解、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = F_4(\tau) \times F_4^{-1}(0) \times \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{bmatrix}$$

但し

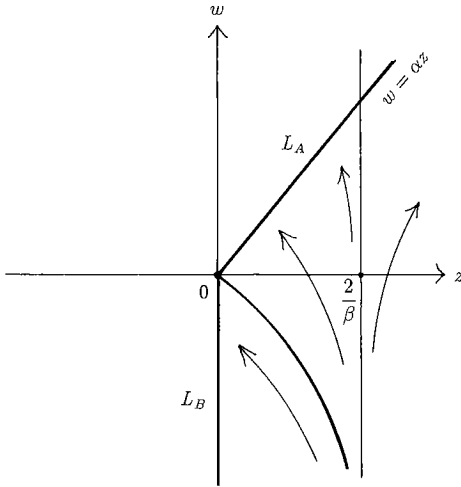


図 6 領域  $D_1$  のベクトル場  
Fig. 6 Vector field in the region  $D_1$ .

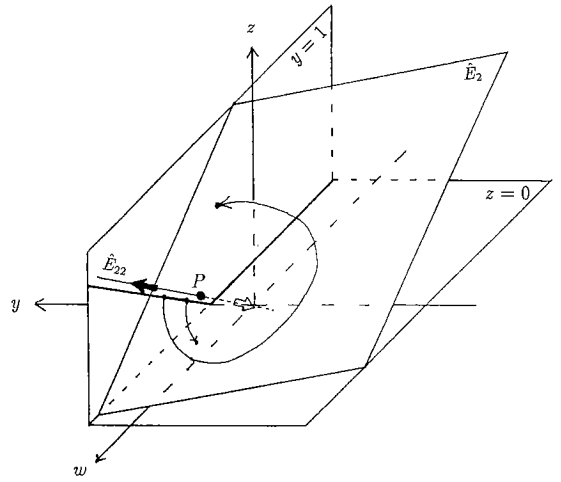


図 7 領域  $D_2$  のベクトル場  
Fig. 7 Vector field in the region  $D_2$ .

$$F_4(\tau) = \begin{bmatrix} f_{4x}(\tau) \\ f_{4y}(\tau) \\ f_{4z}(\tau) \\ f_{4w}(\tau) \end{bmatrix}, \quad f_{4x}(\tau) = \begin{bmatrix} \exp \bar{\sigma}_{41} \tau \cos \bar{\omega}_{41} \tau \\ \exp \bar{\sigma}_{41} \tau \sin \bar{\omega}_{41} \tau \\ \exp \bar{\sigma}_{42} \tau \cos \bar{\omega}_{42} \tau \\ \exp \bar{\sigma}_{42} \tau \sin \bar{\omega}_{42} \tau \end{bmatrix}^T$$

$$f_{4z}(\tau) = \frac{df_{4z}(\tau)}{d\tau}$$

$$f_{4y}(\tau) = -f_{4x}(\tau) + \beta f_{4z}(\tau) - \frac{df_{4y}(\tau)}{d\tau}$$

$$f_{4w}(\tau) = \alpha f_{4z}(\tau) - \frac{df_{4w}(\tau)}{d\tau} \quad (24)$$

ここで、 $x_0, y_0, z_0, w_0$  は  $\tau=0$  における初期点の座標を表す。

4次元以上のシステムではベクトル場の構造を図示することができないので、解の挙動を把握するのは困難である。しかし、本モデルは区分的に3次元以下となる領域が3領域あるので、部分的ではあるがベクトル場を図示することができ、それによって、解の挙動を視覚的に把握することができる。3.で示したように、回路方程式は2次元の領域  $D_1$ 、3次元の領域  $D_2$  および  $D_3$ 、そして4次元の領域  $D_4$  が切り換わる形となる。次に、2次元領域  $D_1$  内に2本の直線を定義する。

$$L_A = \{(x, y, z, w) | x=y=1, w=\alpha z, w \geq 0\}$$

$$L_B = \{(x, y, z, w) | x=y=1, z=0, w < 0\} \quad (25)$$

ここで、 $L_A, L_B$  はそれぞれ  $D_1 \rightarrow D_2, D_1 \rightarrow D_3$  の境界条件に対応している。

領域  $D_1$  のベクトル場を図6に示す。この領域では解は  $x=y=1$  の2次元平面に拘束されている。境界条

件は  $L_A$  および  $L_B$  で示され、 $L_A$  を打った解は  $D_2$  に、また  $L_B$  を打った解は  $D_3$  に入る。式(21)より、この領域における初期点  $(x, y, z, w) = (1, 1, z_0, w_0)$  が

$$\frac{2}{\beta} \left( 1 - \exp \frac{\beta w_0}{\gamma} \right) \leq z_0 \leq \frac{2}{\beta} \quad (26)$$

を満たす場合には、解は必ず  $L_A$  を打つ。また、

$$z_0 < \frac{2}{\beta} \left( 1 - \exp \frac{\beta w_0}{\gamma} \right) \quad (27)$$

の場合には  $L_B$  を打つ。

次に、領域  $D_2$  のベクトル場を図7に示す。この領域では解は  $x=1$  の3次元空間に拘束されている。この領域における不動点  $P$  は完全不安定で、 $\hat{\lambda}_{22}$  および  $\bar{\sigma}_2 \pm j\bar{\omega}_2$  に対応する固有空間  $\hat{E}_{22}$  および  $\bar{E}_2$  は以下のように表される。

$$\hat{E}_{22} : \frac{y}{\alpha \hat{\lambda}_{22}} = \frac{z - \frac{1}{\beta}}{\hat{\lambda}_{22} + \gamma} = \frac{w - \frac{\alpha}{\beta}}{\alpha \gamma}$$

$$\bar{E}_2 : \gamma (\hat{\lambda}_{22} - \beta) y + \alpha \gamma \left( z - \frac{1}{\beta} \right) + (\hat{\lambda}_{22}^2 - \beta \hat{\lambda}_{22} + \alpha) \left( w - \frac{\alpha}{\beta} \right) = 0 \quad (28)$$

$D_1$  から  $L_A$  と  $\bar{E}_2$  の交点より下の部分で  $L_A$  を打ってこの領域に入った解は図に示されるように動き、適当な時刻に必ず  $y=1$  あるいは  $z=0$  のどちらかの境界条件に達する。 $y=1$  を打った解は再び  $D_1$  に入り、 $z=0$  を打った解は  $D_4$  に入る。 $D_4$  から  $D_2$  に入る解はその境界条件が  $x=1$  であるため、どこからこの領域に入るかは  $(y, z, w)$  空間には図示できないが、解の挙動は

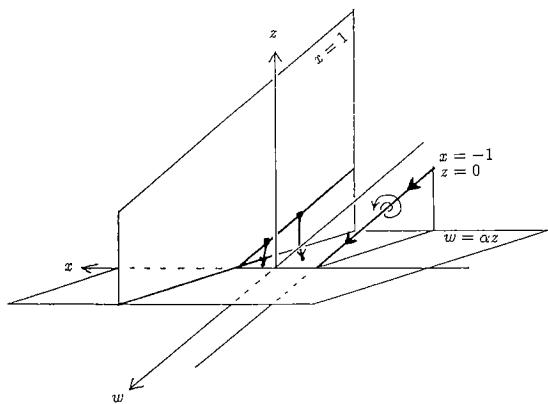


図8 領域  $D_3$  のベクトル場  
Fig. 8 Vector field in the region  $D_3$ .

同様である。

次に、領域  $D_3$  のベクトル場を図8に示す。この領域では解は  $y=1$  の3次元空間に拘束されている。この領域では実固有値は0であり、 $D_1$  から  $L_B$  を打ってこの領域に入った解は図に示されるように  $x=-1, z=0$  の周りを回転しながら  $w$  が増大する方に動き、適当な時刻に必ず  $z=1$  あるいは  $w=\alpha z$  のどちらかの境界条件に達する。 $z=1$  を打った解は再び  $D_1$  に入り、 $w=\alpha z$  を打った解は  $D_4$  に入る。 $D_4$  から  $D_2$  に入る解はその境界条件が  $y=1$  であるため、どこからこの領域に入るかは  $(x, z, w)$  空間には図示できないが、解の挙動は同様である。

## 6. ポアンカレ写像

$L_A \cup L_B$  上に初期値をもつ解、すなわち  $(\tau, x, y, z, w) = (0, 1, 1, z_0, w_0)$  (但し、 $z_0 = (w_0 + |w_0|)/2\alpha$ ) について考える。但し、その点は解が発散しない場合を考え  $L_A$  と  $\bar{E}_2$  の交点  $(x, y, z, w) = (1, 1, w_{\max}/\alpha, w_{\max})$  より下にある場合 (図7参照)、すなわち  $w_0 < w_{\max}$  を対象とする。ここで  $w_{\max}$  は次のように表される。

$$w_{\max} = \frac{\alpha \bar{\lambda}_{22}^2 - (\alpha\beta + \gamma) \bar{\lambda}_{22} + \alpha^2 + \gamma(\alpha + \beta)}{\beta(\bar{\lambda}_{22}^2 - \beta \bar{\lambda}_{22} + \alpha + \gamma)} \quad (29)$$

更に、 $L_A$  上に二つの点  $W_A = (1, 1, w_A/\alpha, w_A)$  と  $W_B = (1, 1, w_B/\alpha, w_B)$  を定義する。 $W_A$  はこの点を出発した解が  $D_2 \rightarrow D_4$  の境界条件である  $z=0$  に接する初期点で、 $w_A$  はこの点を出発した解軌跡が  $z=0$  を満足するような点であり、この条件は具体的には超越方程式を含む形で厳密に表される。 $W_B$  はこの点を出発した解軌跡が  $z=0$  を打って  $D_4$  に入ったあと、 $D_4 \rightarrow D_2$  の境界条件である  $x=1$  と  $D_4 \rightarrow D_3$  の境界条件である

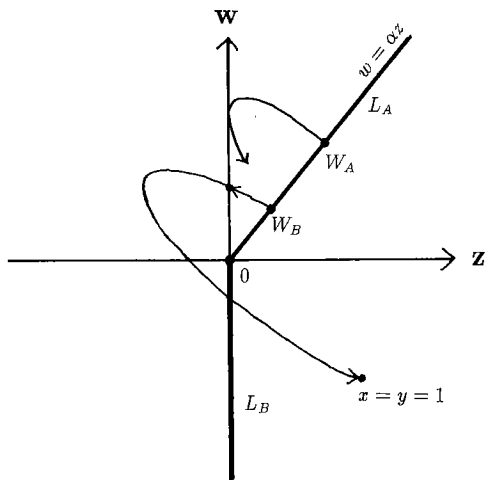


図9 ベクトル場の  $z-w$  平面への投影図  
Fig. 9 Projection of the Vector field onto  $z-w$  plane.

$y=1$  の交点に達するような初期点で、同様に超越方程式を含む形で厳密に表される (図9参照)。

以下の議論では、ポアンカレ写像の定義のために、パラメータ  $(\alpha, \beta, \gamma)$  が次の条件を満足する場合を考える。

(I)  $L_A$  上に初期値をもつとき

(i)  $w_A \leq w_0 < w_{\max}$  のとき、 $L_A$  は  $D_1 \rightarrow D_2$  の境界条件に対応しているため、解はまず  $D_2$  に入る。 $D_2$  に入った解は  $z=0$  に達することなく、直接  $y=1$  に達し  $D_1$  に入る。更に、 $D_1$  に入った解が再び  $L_A \cup L_B$  に達する。

(ii)  $w_B \leq w_0 < w_A$  のとき、 $D_2$  に入った解は  $z=0$  に達し  $D_4$  に入る。更に、 $D_4$  に入った解は  $x=1$  に達し再び  $D_2$  に入る。更に、 $D_2$  に入った解は  $y=1$  に達し  $D_1$  に入り、 $L_A \cup L_B$  に達する。

(iii)  $0 \leq w_0 < w_B$  のとき、 $D_2$  に入った解は  $z=0$  に達し  $D_4$  に入る ( $(\tau, x, y, z, w) = (\tau_1, 1, y_1, 0, w_1)$ )。更に、 $D_4$  に入った解は  $y=1$  に達し  $D_3$  に入る ( $(\tau, x, y, z, w) = (\tau_1 + \tau_2, x_2, 1, z_2, w_2)$ )。更に、 $D_3$  に入った解は  $x=1$  に達し、 $D_1$  に入る ( $(\tau, x, y, z, w) = (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3, 1, 1, z_3, w_3)$ )。そして、 $L_A \cup L_B$  に達する ( $(\tau, x, y, z, w) = (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4, 1, 1, z_4, w_4)$ )。

(II)  $L_B$  上に初期値をもつとき

$L_B$  は  $D_1 \rightarrow D_3$  の境界条件に対応しているため解はまず  $D_3$  に入る。 $D_3$  に入った解は  $z=aw$  に達し  $D_4$  に入る。更に、 $D_4$  に入った解は  $y=1$  に達し再び  $D_3$  に入る。更に、 $D_3$  に入った解は  $x=1$  に達し  $D_1$  に入る。そ

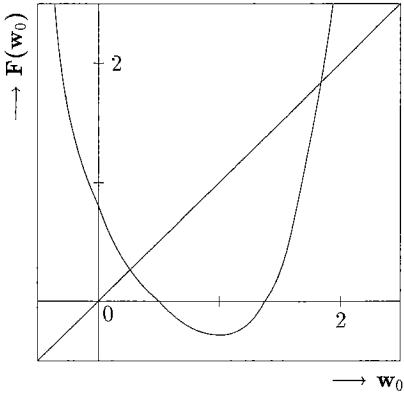


図 10 ポアンカレ写像  $F$   
Fig. 10 An example of the Poincaré map  $F$ .

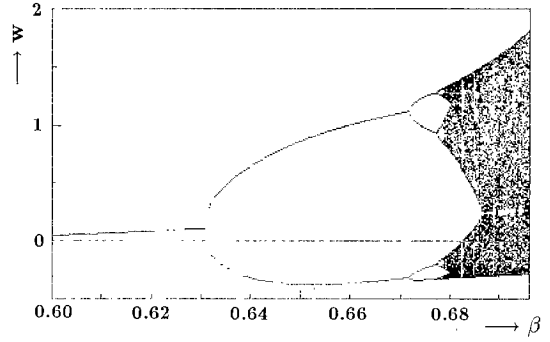
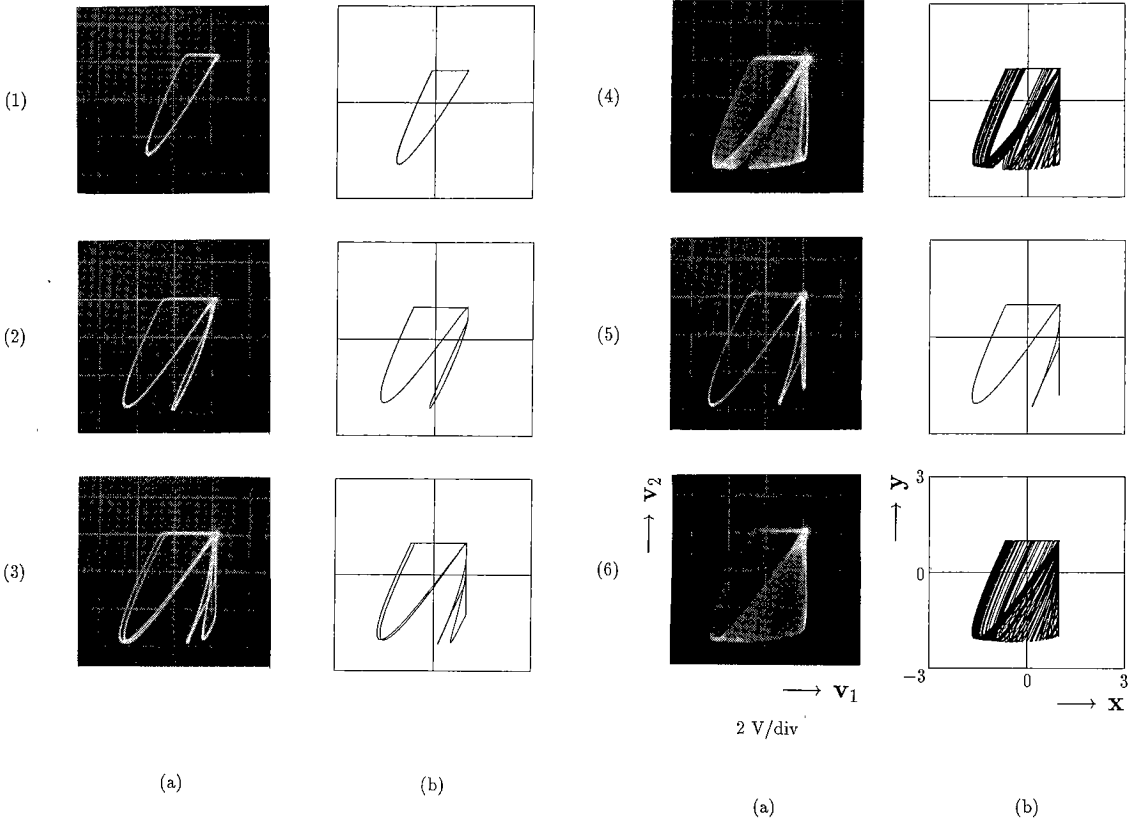


図 11  $F$  の 1 パラメータ分岐ダイアグラム  
Fig. 11 One-parameter bifurcation diagram of  $F$ .



- (1) 1-periodic attractor (a)  $\beta=0.529$ , (b)  $\beta=0.574$
- (2) 2-periodic attractor (a)  $\beta=0.700$ , (b)  $\beta=0.646$
- (3) 4-periodic attractor (a)  $\beta=0.738$ , (b)  $\beta=0.674$
- (4) Chaotic attractor (a)  $\beta=0.748$ , (b)  $\beta=0.685$
- (5) 3-periodic window (a)  $\beta=0.757$ , (b)  $\beta=0.693$
- (6) Chaotic attractor (a)  $\beta=0.758$ , (b)  $\beta=0.696$

図 12 実験結果 (a) とシミュレーション結果 (b)  
Fig. 12 Experimental results (a) and corresponding simulated results (b).



して、 $L_A \cup L_B$ に達する。

以上のことから適当なパラメータを選べば  $L_A \cup L_B$  上の点を出発した解は適当な時刻に再び  $L_A \cup L_B$  に達する。また、 $L_A \cup L_B$  上の点はその  $w$ -座標で表すことができるので、次のようにポアンカレ写像を1次元写像として定義することができる。

$$F: L_A \cup L_B \rightarrow L_A \cup L_B, w_0 \rightarrow F(w_0) \quad (30)$$

但し、 $w_0$  は  $L_A \cup L_B$  上の初期点の  $w$ -座標、 $F(w_0)$  は  $L_A \cup L_B$  を出発した解が再び  $L_A \cup L_B$  に達する点の  $w$ -座標である。 $F$  は超越方程式を含む形で厳密に表現できる。

$F$  の具体的な表現は例として  $0 \leq w_0 < w_B$  の場合を記す。他の場合も同様に導くことができる。

$0 \leq w_0 < w_B$  のとき、 $y_1, w_1$  は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ w_1 - \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times F_2(\tau_1) \times F_2^{-1}(0) \times \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{w_0}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \\ w_0 - \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} \quad (31)$$

但し、 $\tau_1$  は次の超越方程式で表される。

$$-\frac{1}{\beta} = [0 \ 1 \ 0] \times F_2(\tau_1) \times F_2^{-1}(0) \times \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{w_0}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \\ w_0 - \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} \quad (32)$$

次に、 $x_2, z_2, w_2$  は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times F_4(\tau_2) \times F_4^{-1}(0) \times \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ 0 \\ w_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

但し、 $\tau_2$  は次の超越方程式で表される。

$$1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \times F_4(\tau_2) \times F_4^{-1}(0) \times \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ 0 \\ w_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

次に、 $z_3, w_3$  は以下ようになる。

$$z_3 = [0 \ 1] \times F_3(\tau_3) \times F_3^{-1}(0) \times \begin{bmatrix} x_2 + 1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$w_3 = \gamma \tau_3 + w_2$$

但し、 $\tau_3$  は次の超越方程式で表される。

$$2 = [1 \ 0] \times F_3(\tau_3) \times F_3^{-1}(0) \times \begin{bmatrix} x_2 + 1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

そして、 $z_4, w_4$  は以下ようになる。

$$(1) \quad z_3 \geq \frac{2}{\beta} \left( 1 - \exp \frac{\beta w_3}{\gamma} \right) \text{ のとき,}$$

$$w_4 = \gamma \tau_4 + w_3, \quad z_4 = \frac{w_4}{\alpha} \quad (37)$$

但し、 $\tau_4$  は次の超越方程式で表される。

$$\gamma \tau_4 + w_3 = \alpha \left\{ \left( z_3 - \frac{2}{\beta} \right) \exp \beta \tau_4 + \frac{2}{\beta} \right\} \quad (38)$$

$$(2) \quad z_3 < \frac{2}{\beta} \left( 1 - \exp \frac{\beta w_3}{\gamma} \right) \text{ のとき,}$$

$$w_4 = \frac{\gamma}{\beta} \log \frac{2}{2 - \beta z_3} + w_3, \quad z_4 = 0 \quad (39)$$

最後に、

$$F(w_0) = w_4 \quad (0 \leq w_0 < w_B) \quad (40)$$

を得る。

図10は得られたポアンカレ写像  $F$  の例である ( $\alpha = 1.24, \beta = 0.696, \gamma = 0.99$ )。この写像は logistic map と類似した形状をしており、周期倍分岐によるカオス、窓の繰込み等、logistic map に発生するのと同様な現象が発生する。

図11はポアンカレ写像  $F$  の1パラメータ分岐ダイアグラムである。これは、logistic map の分岐ダイアグラムと類似した構造をもっている。

最後に、実験結果とそれに対応するシミュレーション結果を図12に示す。実験では、 $\alpha = 1.24, \gamma = 0.99$  として、 $\beta$  の値を分岐パラメータとして選んだ。

理想モデルで得られたアトラクタは実験で得られたものと定性的によく一致しており、理想モデルを用いる解析手法の妥当性を示している。

## 7. むすび

本論文では、2個のダイオードを含む4次元自励振動カオス発生回路を提案し、ダイオードの素子特性を理想化することによりポアンカレ写像を1次元写像として導き、カオスの発生を厳密に説明した。本研究では4次元回路に発生する周期倍分岐とカオスに着目して解析を行ったが、トラスの分岐問題等に対する、この方法の適用可能性を議論していくことは今後の興味深い問題であると考えられる。

本研究の結果は、複数の微小パラメータを含む拘束方程式を用いる解析手法が系の簡略化という観点から高次元系のカオスの解析に対して効果的であることを示唆するものであると思われる。

謝辞 本研究を遂行するにあたり、貴重な御助言を賜った徳島大学川上博教授、法政大学斉藤利通助教授に深謝の意を表す。

文 献

- (1) Inaba N., Saito T. and Mori S.: "Chaotic Phenomena in a Circuit with a Negative Resistance and an Ideal Switch of Diodes", Trans. IEICE, E70, 8, pp. 744-754 (1987).
- (2) 齊藤利通: "1個のダイオードを含むカオス発生回路の族について", 信学論(A), J71-A, 6, pp.1275-1281(1988).
- (3) Inaba N. and Mori S.: "Chaotic Phenomena in a Circuit with a Diode due to the Change of the Oscillation Frequency", Trans. IEICE, E71, 9, pp. 842-849 (1988).
- (4) Nishio Y., Inaba N., Mori S. and Saito T.: "Rigorous Analyses of Windows in a Symmetric Circuit", IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-37, 4, pp. 473-487 (1990).
- (5) 齊藤利通: "不感帯コンダクタハイパーカオス発生器", 信学論(A), J72-A, 7, pp.1084-1092 (1989).
- (6) 吉永哲哉, 川上 博: "周期的外力を加えた非線形回路にみられる余次元2の分岐", 信学論(A), J72-A, 11, pp. 1821-1828 (1989).
- (7) Saito T.: "An Approach Toward Higher Dimensional Hysteresis Chaos Generators", IEEE Trans. Circuits & Syst., CAS-37, 3, pp. 399-409 (1990).
- (8) 遠藤哲郎, 成田哲也: "2自由度非線形動系における二つの周期解のカオスへの分岐経路", 信学論(A), J71-A, 9, pp.1752-1755 (1988).
- (9) Endo T. and Chua L. O.: "Chaos in Mutually Coupled Phase-Locked Loops", Proc. of ISCAS'90, 1 of 4, pp. 399-402 (1990).
- (10) 高部智晴, 合原一幸, 松本 元: "ホジキン-ハクスレイ方程式のパルス列刺激に対する応答特性", 信学論(A), J71-A, 3, pp.744-750 (1988).
- (11) May R. M.: "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics", Nature, 261, pp. 459-467 (1976).
- (12) Collet P. and Eckmann J. P.: "Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems," Boston: Birkhäuser (1980).

付 録

定理1の証明

$(\epsilon_1 \epsilon_2) \rightarrow (0, 0)$  のとき, 領域1, 2, 3で系は縮退するので, これらの領域のベクトル場の構造について調べる. まず, 式(7)で示した固有値は以下の固有方程式の根である.

$$\text{領域1: } m^4 + C_1 m^3 + C_2 m^2 + C_3 m + C_4 = 0$$

$$C_1 = -\beta + \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{\alpha}{\epsilon_2}$$

$$C_2 = \alpha + \gamma + 1 - \frac{\beta}{\epsilon_1} - \frac{\alpha\beta}{\epsilon_2} + \frac{\alpha}{\epsilon_1 \epsilon_2}$$

$$C_3 = -\beta\gamma + \frac{\alpha + \gamma}{\epsilon_1} + \frac{\alpha}{\epsilon_2} - \frac{\alpha\beta}{\epsilon_1 \epsilon_2}$$

$$C_4 = \gamma \left( 1 - \frac{\beta}{\epsilon_1} \right) \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} \text{領域2: } m^4 + \left( -\beta + \frac{1}{\epsilon_1} \right) m^3 + \left( \alpha + \gamma + 1 - \frac{\beta}{\epsilon_1} \right) m^2 \\ + \left( -\beta\gamma + \frac{\alpha + \gamma}{\epsilon_1} \right) m + \gamma \left( 1 - \frac{\beta}{\epsilon_1} \right) = 0 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} \text{領域3: } m^4 + \left( -\beta + \frac{\alpha}{\epsilon_2} \right) m^3 + \left( \alpha + \gamma + 1 - \frac{\alpha\beta}{\epsilon_2} \right) m^2 \\ + \left( -\beta\gamma + \frac{\alpha}{\epsilon_2} \right) m + \gamma = 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

文献(5)の結果を用いれば式(13), (14), (17), (18)の結果は容易に示すことができる. すなわち, 領域2において, 式(A.2)は  $\epsilon_1 \ll 1$  のとき,

$$(m - \lambda_{21})(m^3 + C_{21}m^2 + C_{22}m + C_{23}) = 0 \tag{A.4}$$

と変形可能であり,  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  のとき,  $\lambda_{21} \rightarrow -\infty$ , 式(A.4)の係数  $C_{21}, C_{22}, C_{23}$  は式(10)の係数  $-\beta, \alpha + \gamma, -\beta\gamma$  に収束する. この領域における固有空間の極限を表す式(17)はこれらの結果を固有空間を表す式に代入すれば得られる. 領域3における  $\epsilon_2 \rightarrow 0$  の場合でも同様である.

次に, 領域1について考える. この領域では回路方程式は二つの微小パラメータを含む. 従って, 文献(5)の結果は直接適用できない. この領域の固有方程式(A.1)は仮定から次のような形に変形できる.

$$(m - \lambda_{11})(m - \lambda_{12})(m - \lambda_{13})(m - \lambda_{14}) = 0 \tag{A.5}$$

式(A.1)との係数比較により,

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + C_1 = 0$$

$$\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{11}\lambda_{13} + \lambda_{11}\lambda_{14} + \lambda_{12}\lambda_{13} + \lambda_{12}\lambda_{14} + \lambda_{13}\lambda_{14} - C_2 = 0$$

$$\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{13} + \lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{14} + \lambda_{11}\lambda_{13}\lambda_{14} + \lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{14} + C_3 = 0$$

$$\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{14} - C_4 = 0 \tag{A.6}$$

を得る. ここで,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \lambda_{13}, \lambda_{14}$  を変数とする次のような関数を考える.

$$\begin{aligned} G_1(\epsilon_1, \epsilon_2, \lambda_{13}, \lambda_{14}) \\ = \epsilon_1 \epsilon_2 \{ C_1(\lambda_{13}^2 + \lambda_{13}\lambda_{14} + \lambda_{14}^2) + C_2(\lambda_{13} + \lambda_{14}) \\ + C_3 + (\lambda_{13} + \lambda_{14})(\lambda_{13}^2 + \lambda_{14}^2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(\epsilon_1, \epsilon_2, \lambda_{13}, \lambda_{14}) \\ = \epsilon_1 \epsilon_2 \{ C_1 \lambda_{13} \lambda_{14} (\lambda_{13} + \lambda_{14}) + C_2 \lambda_{13} \lambda_{14} \\ - C_4 + \lambda_{13} \lambda_{14} (\lambda_{13}^2 + \lambda_{13} \lambda_{14} + \lambda_{14}^2) \} \end{aligned} \tag{A.7}$$

$G_1(\cdot)$  と  $G_2(\cdot)$  は式(A.6)より  $\lambda_{11}, \lambda_{12}$  を消去し, 各項を左辺にまとめることによって得られる.  $G_1(\cdot) = G_2(\cdot) = 0$  は式(A.6)と等価である.  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \lambda_{13}, \lambda_{14}) = (0, 0, 0, \beta)$  に対して次式が成り立つ.

$$G_1(\cdot) = G_2(\cdot) = 0$$

$$\frac{\partial(G_1, G_2)}{\partial(\lambda_{13}, \lambda_{14})} = -\alpha^2 \beta \neq 0 \tag{A.8}$$

従って, 陰関数定理を適用することができ, 次のよ

うな  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  の関数  $g_1, g_2$  が存在する.

$$\lambda_{13} = g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda_{14} = g_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$g_1(0, 0) = 0, g_2(0, 0) = \beta \quad (\text{A}\cdot 9)$$

$g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2), g_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  は  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  についてマクローリン展開することができ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  がともに微小である場合, 第1次近似を用いて, 次のように表される.

$$\lambda_{13} \approx g_1(0, 0) + \frac{\partial(G_1, G_2)/\partial(\lambda_{13}, \varepsilon_1)}{\partial(G_1, G_2)/\partial(\lambda_{13}, \lambda_{14})} \varepsilon_1$$

$$+ \frac{\partial(G_1, G_2)/\partial(\lambda_{14}, \varepsilon_2)}{\partial(G_1, G_2)/\partial(\lambda_{13}, \lambda_{14})} \varepsilon_2 = -\frac{\gamma}{\alpha} \varepsilon_2$$

$$\lambda_{14} \approx g_2(0, 0) + \frac{\partial(G_2, G_1)/\partial(\lambda_{13}, \varepsilon_1)}{\partial(G_1, G_2)/\partial(\lambda_{13}, \lambda_{14})} \varepsilon_1$$

$$+ \frac{\partial(G_2, G_1)/\partial(\lambda_{13}, \varepsilon_2)}{\partial(G_1, G_2)/\partial(\lambda_{13}, \lambda_{14})} \varepsilon_2 = \beta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (\text{A}\cdot 10)$$

式(A・10)の結果を式(A・6)に代入し,  $\lambda_{11}, \lambda_{12}$  は以下のように表される.

$$\lambda_{11} \approx -\frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1$$

$$\lambda_{12} \approx -\frac{\alpha}{\varepsilon_2} + \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \varepsilon_2 \quad (\text{A}\cdot 11)$$

式(A・10), (A・11)より式(12)が成り立つ.

次に, 式(15)を証明する.

$E_a$  は,  $A, B$  をパラメータとすれば  $\lambda_{13}, \lambda_{14}$  に対応する固有ベクトルの線形結合として以下のように表される.

$$x = -\lambda_{13}A - \lambda_{14}B + \frac{\beta}{\beta - \varepsilon_1}$$

$$y = \lambda_{13} \left\{ \lambda_{13}^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \beta \right) \lambda_{13} + 1 - \frac{\beta}{\varepsilon_1} \right\} A$$

$$+ \lambda_{14} \left\{ \lambda_{14}^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \beta \right) \lambda_{14} + 1 - \frac{\beta}{\varepsilon_1} \right\} B$$

$$z = -\lambda_{13} \left( \lambda_{13} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) A - \lambda_{14} \left( \lambda_{14} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) B + \frac{1}{\beta - \varepsilon_1}$$

$$w = \gamma \left\{ \lambda_{13}^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \beta \right) \lambda_{13} + 1 - \frac{\beta}{\varepsilon_1} \right\} A$$

$$+ \gamma \left\{ \lambda_{14}^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \beta \right) \lambda_{14} + 1 - \frac{\beta}{\varepsilon_1} \right\} B + \frac{\alpha}{\beta - \varepsilon_1} + \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \quad (\text{A}\cdot 12)$$

この式より,  $A, B$  を消去し得られる2式に含まれる  $\lambda_{13}, \lambda_{14}$  に式(A・10)を代入し,  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)$  とすることにより, 式(15)を得ることができる.

式(16)は, 式(A・12)に  $x=1$  あるいは  $y=1$  を代入してから  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)$  とすると, 簡単に得ることができる.

(平成2年7月5日受付, 11月16日再受付)



西尾 芳文

昭63慶大・理工・電気卒. 平2同大大学院修士課程了. 現在, 同大大学院博士課程在学中. 主として, 非線形回路に関する研究に従事.



稲葉 直彦

昭59慶大・工・電気卒. 平1同大大学院博士課程了. 同年, 宇都宮大・工・情報助手. 主として, 非線形回路に関する研究に従事. IEEE 会員. 工博.



森 真作

昭32慶大・工・電気卒. 昭37同大大学院博士課程了. 同年, 慶大・工・電気勤務. 現在, 同大・理工・電気教授. 主として, 非線形回路, デジタル通信システム, デジタル位相同期ループ, 医用工学等に関する研究に従事. IEEE, 電気学会, 計測自動制御学会, 日本ハイパーサーミア学会, 日本シミュレーション学会, 情報理論とその応用学会各会員. 工博.